



La interacción con *applets* Java para el aprendizaje de las matemáticas

Philippe R. Richard
Universidad Autónoma de Barcelona
y Universidad de Montréal

En este artículo se quiere mostrar en qué medida la interacción con applets Java, desde su diseño en actividades hasta su uso sistemático, constituye un medio adecuado para el aprendizaje de las matemáticas. Después de dar una definición funcional de un applet matemático, se propone un estudio del uso de un applet que pertenece a un sitio web destacado. Luego se comparan sitios web institucionales en función de cinco indicadores, y se termina con el diseño de una actividad en la cual la interacción con un applet engendra una necesidad matemática de tipo cognitivo. Se introducen la nociones de interacción sujeto-medio como unidad de interacción cognitiva, además de los procesos de instrumentación e instrumentalización como génesis instrumentales.

Palabras claves: applet matemático, interacción alumno-medio, génesis instrumental, competencias matemáticas, gestión y control de conocimientos.

Interaction with Java applets for learning mathematics

This article aims to show how interacting with Java applets, from their design in activities to their systematic use, can be a suitable way for learning mathematics. It gives a functional definition of a mathematics applet and studies the use of an applet from a major website. It then compares institutional websites for five indicators and finally designs an activity where interaction with an applet creates a cognitive mathematical need. It introduces the notions of subject-medium interaction as a unit of cognitive interaction, as well as processes of instrumentation and instrumentalisation as instrumental geneses.

Keywords: mathematics applet, subject-medium interaction, instrumental genesis, mathematics competences, management and control of knowledge.

■ **Introducción: los *applets* matemáticos**

Un *applet* es un «programilla», generalmente escrito con lenguaje de programación Java, que se ejecuta en otro programa como un navegador web. El *applet* permite ejecutar objetos multimedia con un navegador compatible directamente en el ordenador del internauta, sin que importe el sistema operativo empleado. Suele tomar forma de secuencias

(video o sonido) o de representación gráfica dinámica. Ya que la mayoría de los *applets* se crean específicamente por Internet, se trata de aplicaciones pequeñas, robustas, seguras y fácilmente transportables en la red. Sin embargo, como están constituidos a la vez por los datos y por el programa de origen que los hace funcionar (*software* fuente), no se pueden almacenar los *applets* en memoria y se deben cargar cada vez que el internauta consulte el documento web donde aparezcan.¹

Debido a sus características informáticas, el *applet* es una herramienta pedagógica de primera mano. Su búsqueda en el ciberespacio, o su creación con los programas que se tiene en el ordenador, permite diseñar situaciones didácticas adaptadas a las exigencias del docente, así como actividades ad hoc para las necesidades anticipadas o diagnosticadas del alumno. Se puede calificar un *applet* de «matemático» cuando su uso se destina al desarrollo de las competencias matemáticas o al mismísimo ejercicio de conceptualización. De hecho, el *applet* constituye raramente un objetivo pedagógico en sí mismo. Suele intervenir como un medio de ilustración y exploración dentro de un proceso de enseñanza-aprendizaje más amplio, como en un diseño instruccional, una ingeniería pedagógica o una vertebración de unidades didácticas. Además, si bien los *applets* abarcan conocimientos matemáticos, tanto en su programación informática como en la intención didáctica del diseñador, nos interesan sus características emergentes en el sentido de un sistema complejo, cuando invitan a retroacciones en clase o interacciones matemáticas en su uso.

En este artículo, empezaremos con el estudio de una actividad aparentemente sencilla, y con ella situaremos algunos conceptos didácticos claves. Continuaremos con la comparación de cinco estructuras destacadas de *applets* matemáticos según algunas características comunes.

Se puede calificar un *applet* de «matemático» cuando su uso se destina al desarrollo de las competencias matemáticas o al mismísimo ejercicio de conceptualización

El *applet* permite ejecutar objetos multimedia con un navegador compatible directamente en el ordenador del internauta, sin que importe el sistema operativo empleado

Finalmente, en base a los conceptos clave, examinaremos brevemente el proceso de diseño de una actividad con un *applet*, creada en geometría tridimensional y que pretende responder a una necesidad didáctica conocida mediante un problema de figura imposible. Terminaremos con una

crítica sobre el uso de los *applets* matemáticos, subrayando la importancia del contexto y del análisis a priori en la evolución de la práctica docente y las competencias matemáticas del alumnado.

■ Estudio de un *applet* desde una mirada didáctica

En la lengua de cada día, la palabra «conocimiento» se atribuye normalmente a la acción y efecto de conocer. Los conocimientos matemáticos se almacenan en alguna parte, desde la mente humana hasta los diversos escritos tradicionales o electrónicos. Llamamos «medio» a cualquier dispositivo que es soporte de conocimientos matemáticos, y que los puede transmitir, aunque estos no pretendan ser enseñados. Si nos olvidáramos de esta última perspectiva, los conocimientos parecerían algo estático, como si el mero hecho de ser fuese su destino. Evidentemente, sabemos que, como cualquier cosa, los conocimientos matemáticos son y devienen. Es decir, como facultad inherente o manera de conocer, estos se activan cuando una persona dada interactúa con el medio, y esto sucede tanto en la comunicación con un colega como en la lectura de un texto, la interpretación de una figura, la escritura de un razonamiento y, sobre todo, con la manipulación de herramientas técnicas e informáticas. Por lo tanto, si los conocimientos se ponen de relieve en la interacción con el medio, las concepciones de

Llamamos «medio» a cualquier dispositivo que es soporte de conocimientos matemáticos, y que los puede transmitir

una persona se forman también con éste, de modo que consideramos la interacción sujeto-medio como la unidad más pequeña de interacción cognitiva (Margolinas, 2009).

■ Intención en el diseño de la actividad del osito de peluche

El *applet* que consideramos procede del portal *Illuminations* del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), en el que se ofrecen más de seiscientos proyectos de lecciones que integran un centenar de actividades con *applets*, diseñadas para «iluminar» los principios y estándares para la educación matemática de la NCTM. Estos principios y estándares constituyen una organización curricular en matemáticas que cubre toda la educación, desde el parvulario hasta el bachillerato, de modo que las lecciones y actividades se relacionan explícitamente con el currículo. A pesar del notable esfuerzo para estructurar el conjunto de lecciones y actividades, cada una de ellas no es nada más que una intención que hace falta contextualizar con alumnos reales. Si hay una cierta independencia entre una lección y una actividad, esta última se presenta como una unidad didáctica que se deja examinar como tal, no tanto en función de los conocimientos pretendidos en el currículo, sino según el espacio de las concepcio-

A pesar del notable esfuerzo para estructurar el conjunto de lecciones y actividades, cada una de ellas no es nada más que una intención que hace falta contextualizar con alumnos reales

nes que se pueden ejercitar en interacción con el *applet*.

En la actividad del osito de peluche, la intención se desvela de antemano con el texto de presentación que precede al *applet* interactivo.² Para el experto, una primera ojeada al conjunto de la actividad y una exploración rudimentaria del *applet* muestra que los conocimientos en juego se basan en el principio de enumeración. Respecto al currículo, la actividad se asocia formalmente con el concepto de combinación, pero como se propone en toda la etapa 3-11 años («preK-5» en la web, o preescolar hasta 5° de primaria), consideramos que las concepciones de niños pequeños se interpretan más bien en función de uno de los significados de la multiplicación (Poirier, 2001).

Como punto de entrada, el estilo del texto puede resultar algo extraño al lector latino. Al traducirlo del inglés, no sabíamos muy bien a quién estaba dirigida la versión original. Con el estilo impersonal de la primera frase, parece que el uso del «you» es para «usted» como docente o experto. Pero al incluir preguntas directas y comparándolo con el texto de otras actividades, puede tratarse también de «vosotros» o de «tú», el lector, modelo

que elegimos en definitiva. En cualquier caso, ya que puede plantearse entre otros a alumnos que no saben aún leer, no se puede considerar la actividad como «lista para llevar», a menos que el docente adapte las consignas a sus propios objetivos o que dirija a los alumnos durante los procesos de exploración

y resolución. Así que en la actividad, el efecto que tiene el *applet* para el aprendizaje aparece en el primer plano, al igual que la intervención del docente para explicar el significado de los botones y guiar las retroacciones de los alumnos.

Actividad: El osito de peluche

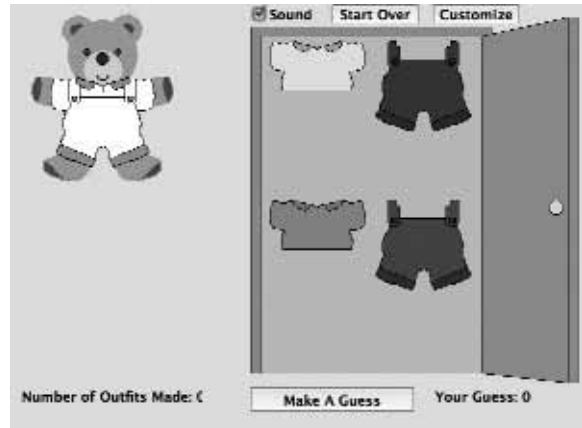
El osito Bobi está planeando sus vacaciones y quiere saber cuántos conjuntos puede formar si se lleva unas camisas y pantalones de diferentes colores.

Instrucciones

Haz clic en «Make A Guess» y, marcando un número, adivina cuántos conjuntos puedes formar con estas camisas y pantalones.

Haz clic en una camisa o un pantalón y arrástralo sobre el osito. Una vez colocado, suelta el botón del ratón. Cuando se forma un conjunto completo, este conjunto aparecerá por debajo del osito. Continúa seleccionando diversas combinaciones de camisas y pantalones, hasta que encuentres todas las maneras posibles de vestir al osito Bobi.

Haz clic en «Start Over» para volver a empezar. Haz clic en «Customize» para elegir una nueva cantidad de camisas y pantalones. Desactiva la casilla «Sound» para apagar el sonido.



Exploración

Ayuda al osito Bobi a formar tantos conjuntos como pueda.

¿Cuántos conjuntos piensas que se puede formar?

¿Cómo sabes cuándo has formado todos los conjuntos?

¿Si te has olvidado de formar un conjunto, cómo puedes saber cuál es el conjunto que hace falta?

¿Cómo puedes simplificar tu trabajo para formar fácilmente los conjuntos?

■ Crítica del *applet* y análisis de su efecto

Con cuatro niños de 5 años, dos de forma individual y una pareja compartiendo el mismo ordenador, diseñamos una experimentación para poner a prueba la intención que conlleva el *applet* en un contexto real. La consigna general era formar todos los conjuntos posibles, aunque tuvi-

mos que repetirla varias veces durante el proceso de devolución de la situación. Al empezar, los niños probaron rápidamente el arrastre. Cuando una prenda de vestir se soltaba alrededor del osito, el magnetismo del *applet* la colocaba arriba o abajo del muñeco, según fuese una camisa o un pantalón. A pesar de que el *applet* validaba la acción en cuanto la cuarta parte de la prenda de vestir se arrastraba cerca del conjunto no colore-

Con cuatro niños de 5 años, dos de forma individual y una pareja compartiendo el mismo ordenador, diseñamos una experimentación para poner a prueba la intención que conlleva el *applet* en un contexto real

ado, los niños se esforzaban en colocarla justo encima de las líneas correspondientes, como si se tratara de colorear un dibujo blanco sin pasarse de la línea. Si esta disposición demuestra que la ilusión de coloración funciona para algunos, plantea también un primer problema de ergonomía en el uso en relación a la previsión de los diseñadores. Podemos pensar así que había una intención en facilitar el enfoque hacía el significado matemático del gesto. Sin embargo, la exigencia de precisión del niño alargó suficientemente el proceso de resolución de modo que éste perdió de vista la consigna inicial, incluso cuando insistimos en que no era necesaria tanta minuciosidad. De hecho, con esta exigencia, según el punto de partida del ratón, cuesta poder hacer el desplazamiento en un mismo movimiento. Por tanto, el magnetismo aparece como una dificultad en contra de la voluntad de colocar las prendas de vestir justo encima, no una ayuda para facilitar el movimiento, la coloración y la focalización conceptual consecuente.

Si dejamos momentáneamente la interacción con alumnos reales, podemos centrarnos en el funcionamiento a priori del *applet*. Cada vez que se completa un conjunto, el *applet* muestra una figurita debajo del osito y, simultáneamente con una voz, devuelve el mensaje «you made an outfit» («realizaste un conjunto»). La superficie del espacio disponible está fija, de modo que el tamaño de las figuritas se ajusta según el número de combinaciones posibles, hasta llenar en el sentido de lectura un rectángulo imaginario que los con-

tiene. Así que el mismísimo tamaño de las figuritas da información desde el inicio del proceso de resolución. Por ejemplo, un alumno familiarizado con el funcionamiento del *applet* puede anticipar el producto con un cálculo de área, en coordinación con otro significado de la multiplicación que habrá ejercitado en la escuela primaria (Poirier, 2001), y apostando su anticipación al marcar un producto con el botón «Make A Guess». Dado que el diseñador de la actividad no previó una pregunta al respecto, podíamos pensar que no quiso valorar los múltiples significados de la multiplicación, que la propia estructura del currículo de referencia le impedía dar cuenta de aquello, o que sencillamente no pensó en tal eventualidad. En consecuencia, el *applet* permite la formación de concepciones matemáticamente correctas que no estaban explícitas en la intención de los diseñadores y que pueden llegar a cambiar fundamentalmente los conocimientos del objetivo inicial.

Por otro lado, si el usuario ya había hecho un conjunto de la lista, el osito vuelve en blanco y la voz dice en inglés: «¡uy, lo habías hecho!», sin señalar nada en la figurita correspondiente. En la resolución en pareja, resulta ser un inconveniente porque el alumno que no está actuando a la interfaz en este momento puede haber perdido de vista la última acción, lo que frena su intento de colaboración. Además, se le permite al alumno cambiar de idea al colocar de nuevo una misma prenda de vestir de otro color, invitando con una

El *applet* permite la formación de concepciones matemáticamente correctas que no estaban explícitas en la intención de los diseñadores y que pueden llegar a cambiar fundamentalmente los conocimientos del objetivo inicial

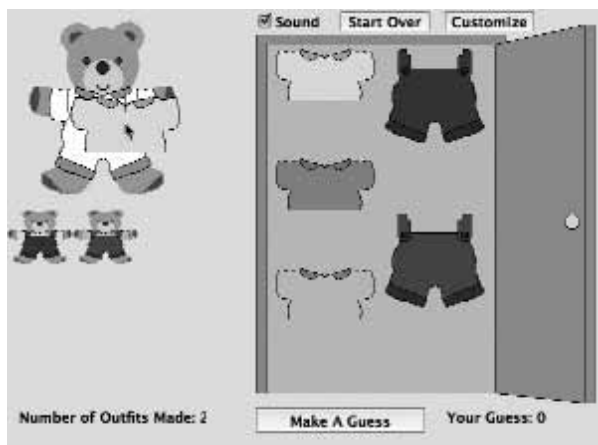


Imagen 1. El *applet* del osito de peluche

voz a completar el conjunto. Sin embargo, en este mundo determinista decidido por los diseñadores del *applet*, no se contempla que el alumno deje durante algún tiempo un conjunto medio formado. El alumno que considera válido el blanco puede quedarse sin entender la ausencia de respuesta o por qué se tiene que apartar este color de la actividad (ver nuestro comentario de abajo sobre la estética). ¿Habría sido mejor transparentar la plantilla en el osito? Una vez completado todos los conjuntos, el *applet* «cierra» la puerta sobre las camisas y pantalones en la derecha. Al instante, la voz confirma que se han formado todos los conjuntos y que el osito puede irse de vacaciones. Si ya se había apostado un número de posibilidades, la voz valida o desaprueba la última apuesta, sin añadir por ello alguna explicación.

En la actividad o en el *applet*, no se prevé una retroacción explícita que relacione el número de conjuntos (conclusión) con la cantidad inicial de las prendas de vestir (hipótesis). Se supone que la actividad se relaciona con la lección «Shorts and Shirts», y que, por esto, permanece en el entorno de la actividad un enlace hacia esta lección. Aun así, al consultar la página de la lección, se pierde el último estado de su trabajo, la

cantidad inicial de las prendas de vestir, el número final de combinaciones y la última apuesta registrada. Esta característica típica del *applet*, que se diferencia del entorno lápiz-papel tradicional en matemáticas, se asemeja al mundo experimental de ciencias cuando el alumno tiene conciencia de cuáles son las hipótesis, cuál es la conjetura o la conclusión, y cómo se controla la interacción en la interfaz, como la necesidad de las operaciones o la coordinación de los significados.

A raíz de nuestra experimentación, identificamos otros obstáculos, pero nos quedamos aquí con dos que parecen genéricos. En primer lugar, todos los niños empezaron por hacer combinaciones con las camisas que aparecen en el marco cerca de los pantalones, en lugar de fijarse en una determinada prenda de vestir y agotar las posibilidades con la otra prenda. Esta tendencia se mantuvo en las nuevas situaciones propuestas (3 por 2, 2 por 3 y 3 por 3); el caso 4 por 3 no resultó concluyente y sólo se pudo plantear a la pareja cuyos miembros se turnaban. Para niños pequeños, la cercanía espacial tiene mucha importancia y el hecho de poder acercar entre ellas las prendas de vestir, antes de su colocación en la plantilla, forma parte de su arsenal de estrategias. Al impedir este movimiento, por ejemplo al querer mantener visualmente dos columnas bien diferenciadas, se condicionan los recursos del alumno. Pero si se abandonan visualmente las columnas, se puede obstaculizar el reconocimiento de una invariante situacional por agotamiento sistemático de casos. ¿Hacia falta permitir estos movi-

La decisión de los diseñadores por la cual se da la preferencia a un enfoque descartando otros, tiene forzosamente consecuencias que van más allá de la ergonomía en el uso

mientos dentro del marco y añadir un botón de restablecimiento? Además, ¿habría sido mejor modelizar ya la actividad con un árbol? En cualquier caso, esta ilustración muestra cómo la decisión de los diseñadores por la cual se da la preferencia a un enfoque (semiótico con el uso de las columnas, cognitivo con su significado), descartando otros, tiene forzosamente consecuencias que van más allá de la ergonomía en el uso.

En segundo lugar, notamos que la estética de conjuntar bien tenía bastante más importancia de lo que podíamos anticipar. Es decir, los niños no querían formar algunos conjuntos sencillamente porque no les gustaban. Incluso, a pesar de haber especificado a posteriori que se trataba de formar «todos los conjuntos bonitos y no tan bonitos», detectamos una cierta tendencia en el orden de selección: podemos conjeturar una preferencia por los colores contrastados en tres casos, y una por los tonos parecidos en el otro. Puede parecer anecdótico frente al ejercicio matemático y, obviamente, no se trata ni mucho menos de sugerir el diseño con alguna gama de colores. No obstante, si la elección de colores fuera la experiencia más atractiva en la interacción con este *applet*, se puede considerar que el ánimo estético interfiere con el esfuerzo de decontextualización necesaria para el reconocimiento de invariantes matemáticos.

■ Algunos conceptos teóricos

El hipertexto de la página web y su contenido multimedia forman parte del entorno como lugar de interacción y de las producciones del alumno. El navegador y el *applet* constituyen unas herramientas que obedecen a una lógica de uso que se convierte, cuando el alumno está familiarizado con el funcionamiento de las herramientas, en auténticos esquemas de uso transferibles de una situación a otra. Sin embargo, las características del entorno que nos interesan están en relación con la especi-

El alumno necesita interactuar con la herramienta, no solamente como soporte material para registrar sus acciones (entorno), sino como un auténtico socio antagónico que le posibilita responder (medio)

alidad del contenido matemático, es decir, los conocimientos contemplados o las concepciones que hacen posible la interacción con el medio.

En una perspectiva behaviorista, el alumno actúa sobre el medio, este informa o sanciona al alumno según su acción. El alumno, perturbado por la influencia del medio, intenta contrarrestar estas sanciones por modificaciones del medio o por aprendizajes que lo modifican a él. No cuesta mucho ver cómo el uso estricto del *applet* se deja interpretar cómodamente con esta perspectiva. No obstante, cuando se quiere explicar en clave de aprendizaje, hace falta un enfoque más rico desde una perspectiva constructivista. Así, para el alumno, actuar consiste en elegir estados del medio según sus propias motivaciones. En la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1998), el medio se presenta como antagonista del alumno o del sistema anteriormente enseñado porque debe reaccionar a las propuestas del alumno en una expectativa de aprendizaje, con relación a la especificidad del contenido que conlleva. Al aparecer en el marco de una actividad con un docente que sabe de antemano cuál es el objetivo de la situación en juego, es cierto que el *applet* devuelve información y sanción, pero el alumno espera algo del *applet*. Puede empezar con intentos para ver cómo reacciona el *applet*, sacar una conjetura de la interacción, confirmar su conjetura al cambiar de hipótesis con el botón «Customize» y reforzar su convicción, mediante el anticipo acertado de sus apuestas o las comparaciones con la disposición rectangular de

las figuritas. En este sentido, el medio se moldea a la voluntad del alumno, aunque éste haya tenido o tenga que probar el *applet* para ver cómo responde a sus acciones. Además, y esto resulta más profundo, el medio participa tanto en la concepción del alumno que puede ser necesario interactuar con él para poder expresar conocimientos. Por ejemplo, el alumno que sabe cómo encontrar todas las combinaciones con el *applet*, pero que no lo ha relacionado con la multiplicación, necesita interactuar con la herramienta, no solamente como soporte material para registrar sus acciones (entorno), sino como un auténtico socio antagónico que le posibilita responder (medio). Al igual que con los signos, las herramientas participan en la objetivación conceptual.

Cuando el alumno intenta «moldear» el *applet* como lo hace con el medio, está desarrollando sus instrumentos. Tradicionalmente, la noción de *instrumento* se atribuye a un tipo de objeto, bien simple, bien formado por una combinación de piezas, y que es adecuado para un uso concreto. En cambio, desde el enfoque cognitivo de los instrumentos contemporáneos de Rabardel (1995), el instrumento se caracteriza por ser una entidad mixta entre un sujeto y una herramienta. Su proceso de elaboración se llama génesis instrumental. Cuando el proceso se orienta hacia el sujeto, se trata de una instrumentación, y hacia la herramienta, de una instrumenta-

lización. En nuestro estudio, el instrumento es una entidad emergente que procede de la naturaleza de las interacciones entre el alumno y el *applet*. Los procesos de instrumentación son relativos a la aparición y la evolución de las invariantes de uso y de acción instrumentada con el *applet*, mientras que los procesos de instrumentalización se refieren a la aparición y la evolución de los componentes herramienta del instrumento. El descubrimiento progresivo de las propiedades intrínsecas del *applet* por los alumnos se acompaña del acomodamiento de sus invariantes, y también de cambios de significado del instrumento resultante de la asociación de la herramienta a nuevas invariantes. Aunque la resolución de la actividad con el *applet* se percibe como una resolución instrumentada, la génesis instrumental puede operar a lo largo del proceso.

■ ¿Ciencias experimentales o matemáticas?

Como herramienta, el *applet* del osito de peluche ofrece un lugar para poder experimentar, pero como medio parece que la emergencia del principio de enumeración queda en entredicho, como si hubiera, en el control de los conocimientos, una diferencia fundamental entre una necesidad instrumental y una necesidad cognitiva. De hecho, el uso de una herramienta que gestiona conocimientos matemáticos, como la representación de números, expresiones algebraicas o analíticas, además de figuras o cualquier otro diagrama matemático de la interfaz, tanto en el diseño de la interfaz como en su funcionamiento interno, tiene que sugerir una relación de necesidad en la lógica que se desprenda de la interacción con el medio. En la actividad del osito, se supone que el medio se constituye conjuntamente del *applet* y de preguntas dirigidas, escritas o expresadas por el docente o un compañero. De por sí, la instrumentación con el *applet* parece insuficiente para fomentar una necesidad cognitiva

Como herramienta, el *applet* del osito de peluche ofrece un lugar para poder experimentar, pero como medio parece que la emergencia del principio de enumeración queda en entredicho, como si hubiera, en el control de los conocimientos, una diferencia fundamental entre una necesidad instrumental y una necesidad cognitiva

entre las hipótesis de la situación y su conclusión. Se puede imaginar un tipo de instrumentalización que establece una relación biyectiva entre el número de camisas y pantalones inicial con las dimensiones del rectángulo compuesto de todas las figuritas, además de una confirmación con una apuesta

acertada o un relleno del rectángulo que parece sistemático (por ejemplo, cuando se ven las prendas de vestir del mismo color en la misma fila o la misma columna en el rectángulo). Sin embargo, como lo abordamos en el apartado «Crítica del *applet* y análisis de su efecto», no hay indicios en la actividad que fomenten esta vía. Incluso en el transcurso de la situación 3 por 2 con nuestra muestra, recibimos 5 como respuesta al número de conjuntos posibles, antes de que se exhibieran los 6 conjuntos con una puerta cerrada. Pero en la situación 2 por 3, para ver si ya se podía anticipar un número acertado o una estrategia de resolución, volvimos a recibir 5 en dos ocasiones, los otros dos no querían responder aún.

Si el alumno, que muestra su capacidad de respetar la lógica interna a la situación, manifiesta su autonomía instrumental, las condiciones de resolución no desvelan por qué el osito se va de vacaciones. A nuestro entender, la actividad provoca un enfoque inductivo que permite motivar y dar significado a una conjetura sobre cuántos conjuntos se pueden formar. No obstante, la demostración de esta, que se deduciría necesariamente de las hipótesis mediante un proceso cognitivo de agotamiento de casos, no se plantea realmente en la actividad, aún menos con independencia de la gestión por el *applet* de los conocimientos matemáticos. Hasta cierto punto, puede alimentar una confusión entre el descubrimiento matemático y la investigación en ciencias. Cómo lo subrayamos en Richard, Meavilla

Se puede considerar que, gracias al argumento empírico, el alumno empezará a buscar una necesidad cognitiva en un contexto probado, partiendo de un grado de convicción razonable acerca de la conclusión

y Fornuny (2010), la instrumentación por inducción puede referirse tanto a un proceso de generalización como a un hecho inferencial. Puesto que la aceptación de una relación de necesidad entre la hipótesis y la conclusión parte del experimento, el alumno trata con casos particulares

mediante una racionalidad inductiva típica de las ciencias experimentales. Se puede considerar que, gracias al argumento empírico, el alumno empezará a buscar una necesidad cognitiva en un contexto probado, partiendo de un grado de convicción razonable acerca de la conclusión. Se puede hablar metodológicamente de incremento de su valor epistémico (Richard, 2004). Aun así, ¿cómo lograría el alumno transponer una versión deductiva del argumento instrumentado que le permitió inferir la conclusión? La respuesta se encuentra en el resto del medio, siempre que el dispositivo de aprendizaje lo contempló, so pena de un beneficio cognitivo o competencial demasiado alejado de la intención de los diseñadores.

■ Cinco sitios de *applets* matemáticos

La mayoría de los sitios web con *applets* matemáticos no aparece junto a una organización curricular. Se suele asociar las actividades a un nivel de alumnado, pero no siempre queda claro si los destinatarios son los profesores o los alumnos, si se trata de una actividad sugerente para la docencia o lista para llevar a clase, o si se destina realmente al aprendizaje en lugar de a una simple ilustración del potencial tecnológico de la herramienta. Aun así, varias iniciativas privadas son de gran calidad, como es el sitio de Informath, publicado en fran-

Sitio	Acceso	Dueño	Lenguas
<i>EDU365</i>	www.edu365.cat/eso/muds/matematicas/index.htm	Departament d'Educació, Generalitat de Catalunya.	Catalán.
<i>Illuminations</i>	http://illuminations.nctm.org/	National Council of Teachers of Mathematics.	Inglés.
<i>Intergeo</i>	http://i2geo.net/	Consortio europeo epónimo.	Alemán, checo, castellano, francés.
<i>National Library of Virtual Manipulatives</i>	http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html	Utah State University.	Chino, castellano, francés, inglés.
<i>Wisweb</i>	www.fi.uu.nl/wisweb/en/	Freudenthal Institut.	Alemán, francés, inglés, italiano, neerlandés. inglés, neerlandés.

Cuadro 1. Cinco sitios de *applets* matemáticos

cés por Daniel Mentrard, que ofrece una gran colección de actividades que se abre por todos los flancos.³ Si decidimos, en este apartado, quedarnos con la descripción de sitios albergados por instituciones, es sobre todo porque nuestro artículo se encuentra en una revista impresa, al menos en papel, y creemos que estos *applets* se publicarán por más tiempo. En el cuadro 1, agrupamos estos sitios con su dirección, la institución que lo alberga y en qué lengua se pueden utilizar los *applets*.

De forma analógica, se puede decir que el apartado «Estudio de un *applet* desde una mira-

da didáctica» muestra el análisis del «diferencial» de un *applet* en interacción. Ahora queremos dar cuenta del análisis de su «integral» según el modelo de organización del sitio que los alberga, el estilo de las actividades donde aparecen, la relación que establecen con el medio, la estructura de ayuda que les acompaña y la conexión propuesta con los currículos de referencia. Puesto que son sitios complejos, suponemos que el análisis de estas variables no permiten predecir lo que podría significar la interacción de cada conjunto en situaciones reales de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, la elección «río arriba» de los diseñadores influye claramente en las interacciones «río abajo» de los usuarios, de modo que estas variables representan puntos de comparación útiles. A continuación, detallamos nuestra comparación y la resumimos en el cuadro 2.

■ Modelo de organización

Una primera incursión en cada sitio desvela cuál es el modo de organización que estructura el conjunto de las actividades. De entrada, *EDU365* se pre-

Se suele asociar las actividades con *applets* matemáticos a un nivel de alumnado, pero no siempre queda claro si los destinatarios son los profesores o los alumnos, si se trata de una actividad sugerente para la docencia o lista para llevar a clase, o si se destina realmente al aprendizaje en lugar de a una simple ilustración del potencial tecnológico de la herramienta

Sitio	Modelo de organización	Estilo de las actividades	Relación del <i>applet</i> con el medio	Estructura de ayuda	Conexión con el currículo
<i>EDU365</i>	Lista de 15 temáticas ordenadas por grupos de edad.	Heterogéneo: un estilo por tema.	Depende del estilo, el acceso puede ser directo o indirecto.	Varía según el estilo del tema, a veces se completa con ejercicios de autoevaluación.	Casi siempre, varía de forma detallada o general.
<i>Illuminations</i>	Filtro para preselección en 4 grupos de edad o motor de búsqueda por palabra clave.	Homogéneo: texto desplegable seguido de un <i>applet</i> .	Equilibrado, puesto en evidencia con el texto plegado.	Instrucciones de uso, consejos de instrumentación o enlace a una lección.	Sí, de forma detallada.
<i>Intergeo</i>	Ontología por contenido y programa.	Homogéneo: un estilo por actividad.	Depende del estilo, a veces completa un texto aparte.	Varía según el estilo de la actividad, hay una estructura de evaluación por pares.	A menudo, varía según el programa de cada país.
<i>National Library of Virtual Manipulatives</i>	Tabla de 5 categorías de contenido temático en función de 4 grupos de edad.	Homogéneo: un <i>applet</i> en el centro con una banda hipertexto opcional.	Puesto en evidencia, incluso con la banda hipertexto activada.	Instrucciones o consejos dirigidos a los alumnos, sus padres o a los docentes.	Sí, de forma detallada.
<i>Wisweb</i>	Filtro por menús desplegables con 8 categorías de contenido temático y 10 grupos según la edad o la necesidad escolar	Homogéneo: un <i>applet</i> en un cuadro o, a veces, en una ventana emergente.	Puesto en evidencia, las instrucciones suelen estar en el <i>applet</i> mismo.	Se limita a una ficha descriptiva y a las instrucciones.	Casi siempre, de forma general.

Cuadro 2. Resumen de algunas variables en relación con los *applets* considerados

senta más como una asociación de subsitios web que como una estructura integrada de actividades con *applets*. Cada sitio está estructurado en torno a un tema diferente y conlleva su propio modelo de

organización. En la *National Library of Virtual Manipulatives* (NLVM), la estructura es visible desde el inicio mediante una tabla interactiva de doble entrada. En ésta se relaciona el contenido

matemático con el intervalo de edades a quien se dirigen las actividades, y se accede a la lista de actividades correspondientes al apretar una casilla de la tabla. Gracias a este modelo, NLVM ofrece todas sus actividades en varias lenguas, incluido el castellano. Con *Wisweb*, todos los *applets* disponibles aparecen por defecto por orden alfabético, pero se pueden filtrar al elegir el contenido matemático y los destinatarios en dos menús desplegables no persistentes. En *Illuminations*, se encuentra también un mecanismo de filtrado, pero hace falta elegir un grupo de edad o utilizar el motor de búsqueda por palabras claves. No se ven las actividades antes del filtrado, pero se puede entender la estructura de forma indirecta al seleccionar el enlace «View All Activities». En cualquier caso, el navegador devuelve dos listas alfabéticas de actividades, y cada una de ellas aparece indexada por su título, el grupo de edad y una breve descripción. La primera lista incluye las más destacadas, en cambio no se entiende cuál es el criterio de selección. Si este sitio es monolingüe y al igual que *NLVM*, se vincula únicamente con el currículo «regional» de la NCTM, *Intergeo* promueve, por el contrario, la internacionalidad tanto lingüística como curricular. Es decir, las actividades están diseñadas en la tradición de cada región o bajo sus condicionantes institucionales. Al emprender una búsqueda con una palabra clave en castellano, se devuelve cualquier actividad conexa, incluso las que provienen de otras tradiciones y que se expresan en otras lenguas. De hecho, la búsqueda funciona a partir de un conjunto estructurado de conceptos matemáticos y términos procedentes del currículo de las regiones participantes, pero, a nivel interno, el modelo de organización permite encontrar equivalentes lingüísticos y curriculares.

De acuerdo con su modelo de organización, el estilo de las actividades puede ser heterogéneo u homogéneo

■ Estilo de las actividades y relación del *applet* con el medio

De acuerdo con su modelo de organización, el estilo de las actividades puede ser heterogéneo u homogéneo. Los sitios heterogéneos son *EDU365* e *Intergeo*. En el primer caso, el estilo varía según la temática, pero dentro de cada subsitio se puede apreciar una cierta homogeneidad. De forma general, cada tema propone una lista de actividades que desembocan directamente en un *applet*, o en unas páginas hipertexto que se desarrollan con enlaces hacia *applets* oportunos. En cambio, *Intergeo* es el más heterogéneo. El estilo varía por actividad, incluso cuando se trata de actividades de un mismo autor. Si algunos parecen utilizar una misma plantilla, otros desempeñan un estilo contextualizado. De hecho, algunos *applets* son autónomos, como con el estilo de *Wisweb* en la que los *applets* contienen hasta las instrucciones de la actividad.

Otros aparecen como con el estilo de la *NLVM*, que les da todo el protagonismo en el centro de la pantalla, dejando la posibilidad de mostrar u ocultar las instrucciones mediante un botón; o como en *Illuminations*, donde el *applet* se integra en un hipertexto introductorio. Incluso, en algunas ocasiones, no hay ningún *applet* porque se supone que, a partir de la actividad propuesta en un fichero de texto, los alumnos podrían construirlo mediante un *software* de geometría dinámica. Por tanto, el papel del *applet* en el medio se puede acomodar a una gama amplia de estrategias pedagógicas desde la interacción con actividades muy dirigidas, hasta fomentar la modelización constructiva y la inventiva abierta. Si algunos *applets* son bastante restrictivos, otros son auténticos micromundos que ponen al alumno en una situación de gran autonomía.

■ Estructura de ayuda y conexión con el currículo

Al ser públicos, los sitios se tienen que adaptar a destinatarios que no son necesariamente usuarios continuos o expertos en el mundo de la educación. Si bien todos contienen indicaciones de uso y se relacionan a priori con conocimientos de referencia curricular, algunos se limitan a una descripción concisa (Wisweb), mientras que otros las relacionan explícitamente con la intención de los diseñadores (lecciones en *Illuminations*, guías en *EDU365*) o con el desarrollo de invariantes de acción instrumentada (prácticamente todos). Con el estudio del *applet* del osito de peluche, vimos que, al analizar de cerca una actividad, es fácil poner en tela de juicio a quién se dirige realmente. No obstante, se puede concluir que todas se destinan al alumnado, a menos que en vez de parecer exclusivo para ellos haya una intención de compartir entre docentes con *Intergeo* y, asimismo, se contemple informar a los padres con la NLVM. Todas estas estructuras de ayuda son asincrónicas y siguen siendo independientes de la acción del usuario.

■ Diseño de una actividad: el planeta en fiestas

En cierto modo, el «macroanálisis» del apartado anterior permite apreciar la importancia que dan algunos sitios institucionales al vínculo de los *applets* matemáticos con los currículos regionales. Mientras tanto, el «microanálisis» del segundo apartado subraya la distancia entre la intención de los diseñadores y el espacio de las génesis instrumentales con un *applet* dado. Si los currículos son útiles como sistema de referencia para dar una coherencia global a un conjunto de actividades, no representan un sistema de explicación sobre los fenómenos en enseñanza-aprendizaje. Aunque el diseño de una actividad con un *applet* pueda

responder a una exigencia puramente curricular, queremos destacar aquí un nuevo espacio de posibilidades que se abre con el medio. No tanto por la complejidad del *applet* en sí mismo, sino para evidenciar que la interacción con el medio puede responder a una necesidad matemática cognitiva, además de instrumental.

Al ser públicos, los sitios se tienen que adaptar a destinatarios que no son necesariamente usuarios continuos o expertos en el mundo de la educación

■ Vistas y representaciones

Mientras que es una evidencia en la vida cotidiana, la enseñanza obligatoria suele descuidar el estudio de la geometría tridimensional, como si los cortes del espacio por un plano fueran suficientes para describirlo. Se sabe muy bien que no es así, pero cuando hace falta conseguir una proyección visual en dos dimensiones para ser mostrada en una pantalla o impresa en papel, la representación en 3D constituye un obstáculo conocido, tanto para la modelización geométrica como para el diseño gráfico (infografía, ilustración y arte). Existen varias técnicas para representar la tercera dimensión, pero el proceso

Si los currículos son útiles como sistema de referencia para dar una coherencia global a un conjunto de actividades, no representan un sistema de explicación sobre los fenómenos en enseñanza-aprendizaje

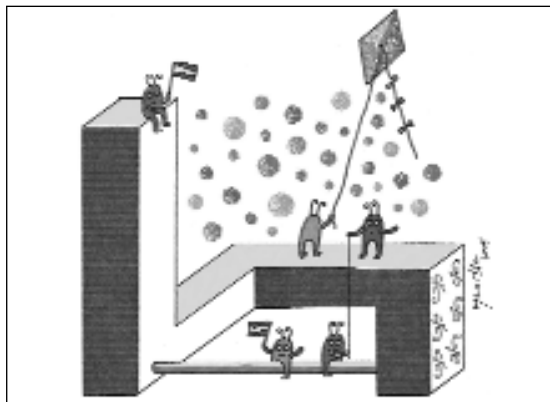
general se resume en dos pasos: modelar lo que se quiere ver o representar (proyecto de modelización) y visualizar o interpretar lo que se modeló (realización gráfica o construcción teórica). Para que se visualice la tercera dimensión, el modelo suele jugar con la perspectiva, la iluminación y las texturas. Sin embargo, el cambio interactivo de vistas interviene casi como una magnitud que simula la tercera dimensión. Es decir, un mismo dibujo puede actuar como representante en una realidad gráfica, con sus propiedades espaciales aparentes y como lo representado de una realidad ausente en un modelo geométrico, cuyas vistas parecen engendrar.

Junto con las paradojas y las ilusiones ópticas, las figuras imposibles suscitan la curiosidad del alumno. Cuando se presentan en un entorno de cultura matemática, su interpretación constituye

un auténtico desafío porque se suele jugar con la confusión del significado que conllevan por una parte, los signos y las formas (relación semiótica), y por otra parte, con los conocimientos adquiridos en el modelo geométrico (relación cognitiva). Con esta idea, diseñamos una actividad que parte de una ilustración de Meavilla (2011), titulada «Planeta en fiestas», en la cual aparece una figura imposible. En un primer proceso de interpretación gráfica, la figura se trata como representante, y en un segundo proceso de construcción instrumentada, se quiere dar cuenta de una «realidad ausente» que constituye el representado en una vista. Con la creación del *applet* que muestra esta realidad, se pide al alumno cambiar de vista para concluir sobre el significado y la necesidad de lo que se ve cuando la figura asume un doble papel de representante y representado.

Actividad: El planeta en fiestas

1. Explica con, al menos, tres características diferentes por qué la situación parece imposible.
2. ¿Si cambiáramos el punto de vista, podríamos contemplar la misma realidad? ¿Por qué?
3. Cuando se modeliza una realidad tridimensional en el plano, se tiene que encontrar una forma de simular la tercera dimensión a partir de las dos primeras. Además de la representación en perspectiva, ¿el cambio de punto de vista constituye en sí mismo un buen modo de simulación?
4. Se puede dar cuenta de un cambio de punto de vista mediante un dibujo animado o una secuencia de dibujos significativos:
 - Con un micromundo de geometría dinámica en 3D, dibuja una vista que represente los elementos geométricos claves de la ilustración.
 - Anima la construcción y decide sobre la realidad representada por la ilustración.



■ Movimiento hacia la tercera dimensión

La actividad de aquí abajo muestra un medio con un texto y una ilustración. Se dirige a alumnos de finales de la educación secundaria obligatoria o principios de bachillerato (14-17 años), según el estado de sus competencias matemáticas, y permite la colaboración con un compañero o la intervención con el docente. Por tanto, aunque los conocimientos matemáticos no estén subordinados al desarrollo de las competencias del alumno, no constituyen de por sí un objetivo de primer plano. Si el *applet* no aparece al inicio, es porque desempeña un papel de micromundo en una actividad abierta. Habríamos podido enseñar de antemano un *applet* con menús de construcción (como GeoGebra 3D), pero al utilizar el Cabri 3D, que esconde los menús una vez creado el *applet*, aprovechamos en nuestro artículo la oportunidad para subrayar las dos tendencias en las génesis instrumentales.⁴ Es decir, la instrumentalización es claramente el proceso dominante durante la construcción geométrica con el *software*, y la instrumentación, durante la generación de las vistas con el *applet*. Ya que dejamos al lector el cuidado de relacionar el medio con la intención en el diseño, tenemos que mostrar cómo el proceso de instrumentalización debería concluir y cuáles son las vistas que se pueden desprender de la instrumentación con el *applet*.

Al final de la actividad, se pide representar la ilustración con un micromundo de geometría

Aunque los conocimientos matemáticos no estén subordinados al desarrollo de las competencias del alumno, no constituyen de por sí un objetivo de primer plano

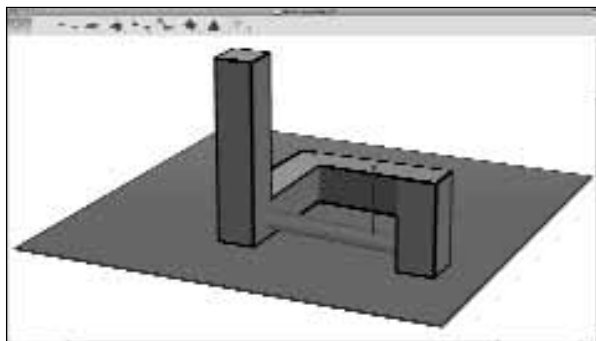


Imagen 2. Representación de la ilustración mediante el Cabri 3D

dinámica tridimensional para fomentar la idea de que la ilustración es un buen corte en el espacio. La cuestión de la imposibilidad se deja interpretar como un problema de vistas y permite así acercarse a la importancia de introducir el cambio para entender la realidad. Mediante el Cabri 3D, se puede llegar a representar la ilustración con la vista que se muestra en la imagen 2.

Los elementos clave que engendran la imposibilidad están representados en la ventana, pero los cambios de vista desvelan una realidad de cartón piedra (secuencia de la imagen 3). Aunque los menús desaparecen en la creación del *applet*, se mantiene:

- El desplazamiento de vistas, como si la construcción estuviera confinada en una bola de cristal que se puede mover.
- La lógica de la construcción durante el desplazamiento, como si se tratara de una realidad sintética sólida.

Cuando un alumno utiliza el desplazamiento, puede tener una mirada discreta y no considerar nada más que un estado inicial y un estado final, o puede tener una mirada continua y observar los cambios de la realidad durante el movimiento (Restrepo, 2008). Aunque la necesidad de

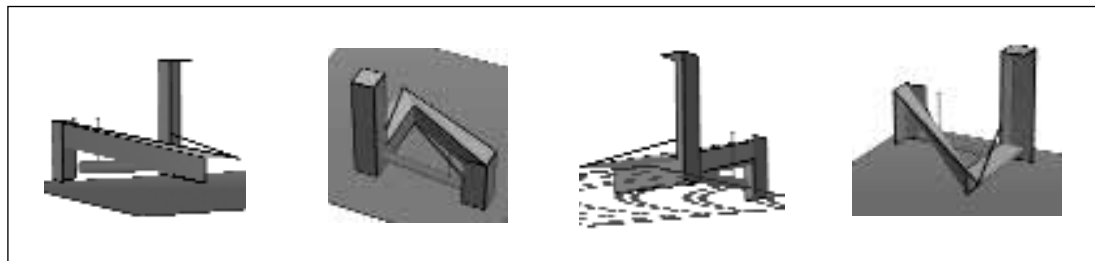


Imagen 3. Secuencia con los cambios de vista

las vistas es de tipo instrumental, el alumno sigue teniendo el control en la interpretación de los conocimientos representados en su construcción. Por lo tanto, que la interpretación nazca de un foto-desplazamiento (interacción discreta) o un cine-desplazamiento (interacción continua), la mismísima interacción del alumno con el *applet* engendra la tercera dimensión y le permite sacar de esta realidad una necesidad esencialmente cognitiva en la interacción alumno-medio.

En definitiva, el juego entre realidades, sus interpretaciones, sus modelos geométricos y sus vistas no dejarán de reservarnos sorpresas que encierran un gran potencial pedagógico. Así mismo, pese al uso de unas herramientas que gestionan conocimientos matemáticos, se pueden utilizar para acercar a los alumnos a una comprensión fina de su entorno con la ayuda del pensamiento geométrico.

■ Conclusión

Hoy en día, los *applets* Java son herramientas ineludibles para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Al poder ejecutarse en un navegador compatible, están inmediatamente disponibles si el

La interacción del alumno con el medio renueva el espacio de trabajo y crea enlaces inéditos a los conceptos y procedimientos matemáticos

profesor o los alumnos pueden disponer de un acceso al ciberespacio. Aunque existen empresas informáticas que los utilizan en su programación de actividades interactivas, como Maths for More o TutorMates en España, la oferta pública de *applets* matemáticos es suficientemente amplia y variada para complacer al docente que sabe adaptarse a las competencias de sus alumnos. Del mismo modo que sucede con las calculadoras gráficas y

los *software* didácticos corrientes, se puede utilizar los *applets* para explorar y dar sentido a los conocimientos tradicionales. Sin embargo, como con cualquier sistema complejo, la interacción del alumno con el medio renueva el espacio de trabajo y crea enlaces inéditos a los conceptos y procedimientos matemáticos. El desarrollo que planteamos en el apartado «¿Ciencias experimentales o matemáticas?» indica cómo el descubrimiento matemático y la experimentación científica se ven asociados en la interacción con *applets*. Habríamos podido profundizar al introducir una noción de razonamiento instrumentado en esta interacción pero, a cambio, hemos propuesto una actividad que subraya su papel en la representación de una realidad sorprendente.

Dado que el medio gestiona una parte de los conocimientos en la interacción con el alumno, el diseño de una actividad con un *applet* continúa

siendo una tarea delicada para el docente. Aunque se puede considerar de antemano, al igual que algunos sitios web institucionales, cuál es la relación que pretende una actividad dada con el currículo oficial, es el juego del docente quien define y da sentido al juego del alumno y a los conocimientos involucrados. Como ocurre en clase, el docente actúa en el medio del alumno cuando elige los problemas por resolver y las condiciones del proceso de resolución. La interacción del alumno en este medio informa al docente sobre el desarrollo de sus competencias, por ejemplo, a partir de las respuestas que los alumnos dan al problema, las dificultades que encuentran en ello, etc. Por consiguiente, cualquier descripción del potencial pedagógico o competencial de un *applet* queda supeditada a la realidad de los contratos didácticos. No obstante, el análisis a priori del medio contribuye a entender el espacio de lo posible y así, ayuda en interpretar la interacción del alumno con el *applet*. Así mismo, el enfoque instrumental es útil para refinar el diseño de las actividades y alcanzar el tipo de necesidad que se crea en relación con el medio propuesto. Si todavía no es fácil diferenciar lo que depende del instrumental o del cognitivo, estamos convencidos de que ambos participan en la elaboración de las concepciones en el alumno.

Notas

1. En algunos casos, como en el proyecto Gauss (<http://recursostic.educacion.es/gauss/web>), cada ítem didáctico contiene una construcción realizada con el *software* libre GeoGebra y así, se puede archivar el *applet* en el ordenador del usuario.
2. Original disponible en <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=3>.
3. Se puede acceder a partir de <http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/accueillmath.htm>.
4. Para GeoGebra 3D, se puede consultar <http://geogebra.org/trac/wiki/GeoGebra3D>, y para Cabri 3D, <http://cabri.com/es/cabri-3d.html>.

Referencias bibliográficas

- BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage.
- MARGOLINAS, C. (2009): *Points de vue de l'élève et du professeur: Essai de développement de la théorie des situations didactiques* [en línea]. Université de Provence. <http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/96/95/PDF/HDR_Margolinas.pdf>. [Consulta: abril 2011].
- MEAVILLA, V. (2011): *Geometría imposible. ¿Es posible enseñar geometría con figuras imposibles?* [en prensa].
- POIRIER, L. (2001) : *Enseigner les maths au primaire, notes didactiques*. Saint-Laurent. Éditions du Renouveau pédagogique.
- RABARDEL, P. (1995) : *Les hommes et les technologies*. París. Armand Colin.
- RESTREPO, A.M. (2008) : *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de sixième*. Tesis doctoral. Grenoble. Université Joseph Fourier.
- RICHARD, P.R. (2004) : *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berna. Peter Lang.
- RICHARD, P.R.; MEAVILLA, V.; FORTUNY, J.M. (2010): «Textos clásicos y geometría dinámica : estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría». *Revista Enseñanza de las Ciencias*, núm. 28(1), pp. 95-111.

Referencias del autor

Philippe R. Richard

Universidad de Barcelona y Universidad de Montréal
philippe.r.richard@umontreal.ca
 Líneas de trabajo: didáctica de las matemáticas.

Este artículo fue solicitado por UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en enero de 2011 y aceptado en abril de 2011 para su publicación.