Reseña de "La enseñanza de las Ciencias Matemáticas" de *Jean Pierre Kahane*

por

Philippe R. Richard

Título: L'enseignement des sciences mathématiques
Autor: Jean-Pierre Kahane
Edita: Éditions Odile Jacob et CNDP
Precio: 22 Euros
Fecha: 2002
Páginas: 284
ISBN: 2-7381-1138-6

Quoi de plus précieux à transmettre à nos enfants, pour les préparer à un monde imprévisible, qu'un exercice de la raison humaine en bon état de marche? Les mathématiques ne représentent qu'une partie de la recherche scientifique, et qu'une partie, d'ailleurs très importante, de l'éducation des jeunes. Elles sont, en effet, un apprentissage de la raison, et constituent, dans leur permanence comme dans leur mouvement, ce que Joseph Fourier écrivait avec éloquence de l'Analyse mathématique, à savoir "une faculté de la raison humaine, destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens"[10].
-Extracto del Prólogo

[10] ¿Qué hay más precioso para transmitir a nuestros niños, para prepararlos para un mundo imprevisible, que un ejercicio de la razón humana en buen estado de funcionamiento? Las matemáticas representan sólo una parte de la investigación científica, y sólo una parte, por cierto muy importante, de la educación de los jóvenes. Son, en efecto, un aprendizaje de la razón, y constituyen, tanto en su permanencia como en su evolución, lo que Joseph Fourier escribió con elocuencia acerca del Análisis matemático, a saber "un poder de la razón humana, destinado a compensar la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos".

¡Cómo suenan hoy en día las palabras de hace dos siglos! Aun cuando el vínculo entre la razón humana y las matemáticas existe desde antaño, como en la obra de Aristóteles o Descartes, su relación con la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos parece deslizarse en el eje del tiempo. Refuerzan el axioma: si no sabemos cómo será la sociedad de nuestros alumnos, entonces debemos ejercer su facultad de discurrir, de argumentar y de demostrar. Por lo tanto corresponde a los militantes de la enseñanza de las matemáticas promover estas palabras en el discurso social, como justificación evidente y necesaria de una urgencia perpetua. Este argumento, sin embargo, se asemeja a un tópico. Al igual que cuando se evoca el valor incalculable de las matemáticas en el patrimonio mundial o cuando se subraya que nuestra civilización está impregnada de matemáticas hasta la médula –particularmente con la omnipresencia de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación, tan nuevas ya como el Nuevo Mundo–. No obstante, seguro que no es un tópico cuando se contraponen matemáticas y democracia. Porque no son forzosamente buenos compañeros de viaje y es uno de los aspectos del rechazo de las matemáticas en su forma actual. A pesar de todo, la relación entre ambas es tan fuerte que, contrariamente a lo que piensa la gente, un buen dominio del cálculo, de la geometría, de la estadística y de las probabilidades constituye todo un triunfo para ubicarse en el presente y entender lo que está en juego para el futuro. En el otro lado, los ciudadanos se sienten impotentes ante su desconocimiento completo de las matemáticas y del tratamiento de la información numérica –los estadounidenses llaman a esta falta el "innumeracy", con el mismo título que el analfabetismo clásico, el "illiteracy"...–.

Tras la lectura del prólogo de Jean-Pierre Kahane, es fácil hacer malabarismos con las ideas, combinando el pensamiento del autor con el nuestro. Engendrar ideas es precisamente el objetivo de *L'enseignement des sciences mathématiques*. Este libro nace de un informe que la *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques* presentó al ministro de la Educación Nacional en Francia. Esta comisión, dirigida por el autor, está formada por una veintena de miembros representativos de la *noosfera* matemática[11]. De un modo parecido a la estrategia utilizada en España para llegar a informar sobre la situación de las enseñanzas científicas en la educación secundaría (Ponencia de estudio del Senado), son las principales asociaciones de matemáticos y de profesores de matemáticas que solicitaron al ministro que se creara un espacio institucional de reflexión. Salvo que la pregunta que está en el primer plano abarca todos los órdenes de enseñanza y toca específicamente las ciencias ma-

[11] Probablemente inspirado por Pierre Teilhard de Chardin, el didacta Yves Chevallard pronone el neologismo "noosphère" (esfera de reflexión) en su libro *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, para designar el lugar donde se piensa el funcionamiento didáctico (padres de alumnos, portavoces de los establecimientos escolares o del cuerpo de inspectores, representantes del poder político, algunos especialistas de las disciplinas que tienen interés en la docencia, etc.). En el caso de la Comisión, los miembros proceden del mundo docente o investigador.

temáticas: *ante los grandes problemas del mundo, que comprometen política y democracia, ¿hay un lugar para una reflexión a largo plazo sobre la enseñanza de las matemáticas?* Obviamente, para nuestros vecinos postpirenaicos, la respuesta es afirmativa. El punto de partida de la Comisión se fundamenta en, nada menos, que: *¿Por qué se tienen que enseñar las matemáticas hoy en día? ¿Qué enseñar? ¿Quién debe enseñar? ¿Cómo?*

Obedeciendo a una lógica epistemológica, el libro estructura sus capítulos según el contenido siguiente: la informática, la estadística y la probabilidad, la geometría y el cálculo. Los capítulos ofrecen propuestas para reforzar, modificar o introducir conceptos, métodos y actitudes matemáticas que se deberían trasladar al ámbito docente, argumentando fundamentalmente en términos de coherencia científica[12]. En cada capítulo se tratan aspectos tecnológicos, curriculares, y se respectan las particularidades asociadas a cada orden de enseñanza y a la formación inicial o continuada de los maestros. En algunos casos, se añaden consideraciones para la formación profesional en empresa, la formación en escuelas de ingeniería y los recursos en los establecimientos escolares. Se insiste, en varias ocasiones, en la necesidad de equipar las escuelas de laboratorios de matemáticas. Para ello se cita, en la conclusión, la idea "nueva" que Émile Borel escribió en 1904:

> *Pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de mathématiques*[13]. (p.269)

Si esta lección sobre la relatividad de la novedad nos hace sonreír, las sugerencias que contiene el libro resultan ser muy actuales. Veamos algunos planteamientos que presenta.

[12]En el universo francófono, el sintagma "ciencias matemáticas" no es nada usual como lo es en España, al menos en los títulos oficiales. Pese a la insistencia de Bourbaki en que el singular "matemática", poco frecuente en el lenguaje corriente, parecía a pesar de todo preferible, se vuelve a emplear el plural desde la contrarreforma de los años 1980. Además de una concepción, puede que haya una estrategia en el título de Kahane. El punto de partida es siempre y claramente matemático, pero se recuerda que, como ciencia, las matemáticas han interactuado y interactúan con otras ciencias. Así, en el contexto de su enseñanza, se tiene que considerar las matemáticas desde su perspectiva histórica, epistemológica y didáctica más general.

[13]Para transmitir, no sólo a los alumnos, sino también a los profesores, pero especialmente al espíritu público, una noción más exacta de lo que son las Matemáticas y el papel que realmente juegan en la vida moderna, será necesario hacer más y crear verdaderos laboratorios de matemáticas.

La informática

El primer capítulo se abre con una pregunta del euromillón: *¿por qué introducir una parte de informática?* Respuesta en la ficha del presentador: para fomentar el espíritu algorítmico, aplicar razonamientos formalizados en un universo definido, manipular cuestiones de calculabilidad y efectividad, así como simular el comportamiento de un sistema complejo (cálculo y tratamiento de datos) a partir de un modelo matemático. Un escéptico que está en el estudio contesta al presentador: *Muy bien, pero ¿por qué en matemáticas?* Podría ser porque el ordenador ha permitido, gracias a su potencia de cálculo, abordar algunos objetos bajo un aspecto nuevo; porque el tratamiento por ordenador plantea nuevas cuestiones y permite hacer una revisión de algunos ámbitos; porque el desarrollo reciente de las matemáticas discretas, la lógica aplicada y la algorítmica están en pleno impulso y, sencillamente, porque la vida de los matemáticos cambia con las nuevas tecnologías –el ordenador es indispensable en su despacho–.

Esta relación epistemológica entre la informática y la matemática desemboca en cómo hacer progresar los currícula y en qué formación tendrían que tener los docentes a este respecto. Precisamente por ello, resulta sorprendente que no se suelan enseñar conceptos básicos en algorítmica y en programación[14], a pesar de ser muy próximos a las matemáticas, mientras que el uso didáctico de ordenadores y de calculadoras se extiende, al mismo tiempo, que se recomienda en los textos oficiales. Habitualmente se emplean los soportes lógicos siguientes: *trazalíneas* de curvas, programas de visualización, programas de geometría dinámica, sistemas de cálculo simbólico y programas de tratamiento de datos estadísticos. Al igual que en matemáticas, la potencia de cálculo de las máquinas conceden nuevas experiencias en clase y permiten retomar nociones clásicas con el uso de ordenadores. Pese a la distinción esencial entre utilizar un soporte lógico y aprender informática, hay varias situaciones que se formulan desde las matemáticas y que se benefician de un tratamiento conjunto, como el ejemplo de los grafos, las envolventes convexas en el plano y las fracciones continuas. En cualquier caso, los docentes tienen que tener una formación inicial[15] en algorítmica y en programación para que se pueda integrar una parte de informática en la enseñanza de las ciencias matemáticas, etapa 15-18 años. El profesorado actual debe poder disponer de tiempo, medios y condiciones para lograr actualizar sus conocimientos, y la formación continuada debe realizarse en asociación con los centros de formación de maestros y los institutos de investigación en educación matemática[16].

[14] Estructura de datos y complejidad en algorítmica, estructuras de control (bucles y conexiones) y recursividad en programación.

[15] En carreras mixtas o en itinerarios universitarios con troncos comunes.

[16] *Institut universitaire de formation des maîtres* (IUFM), *Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques* (IREM)...

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Dos de los temas claves desarrollados conciernen el tratamiento de datos numéricos en su contexto de estudio y el lugar de la aleatoriedad en la enseñanza de las matemáticas. A través de ejemplos, se destaca por una parte la variedad de los razonamientos en estadística descriptiva, exploratoria o inferencial. Ya que esta variedad aparece tanto en la organización de la información como en su interpretación, se llega a comprender la pertinencia de razonamientos estadísticos cuando se han podido practicar respecto a contextos de estudio. Por otra parte, se señala que el interés por la teoría de la probabilidad se arraiga en sus relaciones dentro y fuera de las matemáticas y en la influencia intelectual que tiene sobre la realidad. La clase de matemáticas es un lugar donde se pueden establecer enlaces entre los diversos campos de aplicación de la estadística y donde se crean elementos de una cultura y de una práctica común. Además, hoy en día, la simulación aleatoria es un componente de esta práctica común que cambia completamente el modo de acceso a la aleatoriedad: emplea conceptos y resultados recientes en matemáticas que no es obligatorio entender para practicar; permite determinar propiedades de las experiencias cuyo modelo se simula, pero sólo es comprensible y eficaz acompañada de una reflexión matemática. La aleatoriedad es un hilo conductor en un itinerario de formación, no un par de capítulos en probabilidad y estadística.

Cuando se dice que la materia bruta trabajada por la estadística está constituida de datos experimentales, que las herramientas teóricas empleadas son esencialmente la geometría y el álgebra lineal para la estadística exploratoria, y la probabilidad para la estadística inferencial, el instrumento material es el ordenador. En una perspectiva de formación, el uso de la informática es doble: acceso a datos diversos y de calidad, con posibilidad de poner en práctica tratamientos estadísticos sobre ellos; la simulación es una herramienta privilegiada para adquirir una experiencia con fenómenos aleatorios, entender teoremas de convergencia, ver donde se sitúan las preguntas y comprender la naturaleza de las pruebas en estadística. En la etapa 12-18 años, la enseñanza se puede apoyar en situaciones de juegos de azar, de fenómenos biológicos como la variación de velocidad de crecimiento y el estado final, del tiempo de espera de un autobús o en un cajero, de las coincidencias de sucesos o del encuentro entre personas, de colecciones de cromos en cajas de cereales o en chocolatinas, de riesgos y de previsiones meteorológicas. Estas situaciones no se reconocen siempre como contextos que se pueden pensar en términos de aleatoriedad o de imprevisibilidad. Sólo los hechos de reconocerlas, de contemplar para algunas ciertos modelos simplificados y la posibilidad de simularlas favorecería la elaboración de imágenes mentales previas a la introducción de conceptos teóricos.

La geometría

Algunas frases históricas fueron tan explosivas en su día que resuenan aún en el inconsciente colectivo de los pueblos. La famosa invectiva de Dieudonné en los años 1960 "*À bas Euclide, plus de triangles!*" parece justificar el inicio del capítulo: *¿por qué enseñar la geometría hoy en día?* Para el ciudadano, los motivos a favor no faltan. La geometría elemental contribuye a familiarizarse con el espacio, ayuda en el aprendizaje del razonamiento, desvela sus aspectos estéticos y culturales a lo largo de la historia de la humanidad y, como si fuera poco, aparece en numerosas circunstancias de la vida cotidiana: para leer mapas u orientarse en una ciudad, para entender los planos de objetos para montar o detectar posibles problemas en el plano de un piso, para desplazar muebles (prever si la maniobra es posible) y para interpretar correctamente las muy abundantes representaciones gráficas que exhiben los medios de comunicación. Además, no solamente la geometría permanece como protagonista en las ciencias y en las técnicas de los ingenieros sino que se vincula significativamente con las otras ciencias. En matemáticas, aunque la geometría elemental no forme parte de la investigación contemporánea, interviene efectivamente en la geometría diferencial, en los aspectos geométricos de las estadísticas, en investigación operativa (mediante la programación lineal), en geometría computacional, en las imágenes de síntesis y en todo lo que concierne a la visión y a sus enlaces con la geometría proyectiva. La comisión de reflexión concluye que la pregunta inicial es capciosa. Mantener una enseñanza de la geometría en la etapa 12-18 no es una cuestión sino un imperativo absoluto: se plantea seguidamente cómo se puede adaptar la enseñanza en las nuevas condiciones de la docencia.

Después de criticar la reforma de las matemáticas modernas y de comentar los programas actuales desde la enseñanza primaria, se detalla qué enseñar en geometría y cómo enseñarla. En primer lugar, se propone que el contenido tiene que desarrollar la geometría en el espacio, reforzar el papel de los invariantes (longitud, ángulo, superficie), hacer hincapié en los problemas de lugares geométricos y de construcciones, rehabilitar los casos de isometría de los triángulos, así como iniciar a los alumnos en una geometría rica. Con el sintagma "geometría rica" se entiende devolver la trascendencia del grupo de transformaciones asociado a una geometría (programa de Erlangen) y, junto al grupo, de los invariantes asociados y de las relaciones entre estos invariantes[17]. En segundo lugar, se pretende que la enseñanza de la geometría dispone a pensar geométricamente, a enseñar a los alumnos a ver en el espacio y a razonar científicamente, a evitar la obsolescencia de nociones empleadas excesivamente por algunos libros de clase, a dejar sitio para las nuevas tecnologías, así como

[17] En el caso de la geometría euclídea plana, puede significar la importancia crucial de las nociones de productos escalar y vectorial en un ámbito vectorial, o de las nociones de longitud, ángulo y área en el marco regulado por los axiomas de Euclides. El libro dedica un anexo específicamente a la geometría elemental en las matemáticas de hoy.

a enlazar la geometría con las otras ciencias. La aportación del movimiento, intuitiva o como noción, que se combina al pensamiento geométrico, resulta pedagógicamente potente para la exploración dinámica de un objeto estático, para el vaivén entre la figura y la descripción analítica, para la ilustración de propiedades o teoremas y para la visualización de invariantes. De todos modos, estas propuestas no son factibles si no se acompañan de medidas en la formación de los maestros, como fortalecer el sitio de la geometría en los cursos universitarios, reforzar la formación inicial de los maestros en geometría, mantener el papel que tiene la geometría en las oposiciones y ampliar la formación continuada en geometría.

El cálculo

Si bien el cálculo es omnipresente en el ejercicio matemático, las relaciones que mantiene con la enseñanza de las matemáticas se encuentran en una fase de desestabilización. Al igual que en el universo social y el mundo científico, el desarrollo de las tecnologías informáticas han modificado profundamente las prácticas asociadas al cálculo. La mayoría de los algoritmos que ocupaban una parte sustancial del tiempo didáctico están implementados en calculadoras de bolsillo, representando un ahorro de cálculo notable para explorar, simular o experimentar. Por el contrario, el cálculo plantea cuestiones nuevas en torno a la representación informática de los objetos matemáticos a los cuales se refiere o a las cualidades técnicas de los algoritmos que van más allá de su única efectividad, preguntas fuera de la docencia hasta recientemente. Sin la pretensión alguna de ser exhaustivo y ciertamente para permitir el debate, se propone caracterizar el cálculo con unos vectores temáticos: el cálculo sigue siendo un componente esencial en todos los niveles; depende del lenguaje empleado, de los instrumentos de cálculo y de la complementariedad cálculo exacto/cálculo aproximado; queda inseparable de los razonamientos que prepara o que lo guían; articula las relaciones de las matemáticas con lo “real” por medio de la modelización y sustenta la construcción de conceptos matemáticos. A través de estos vectores se ofrece una epistemología del cálculo y una imagen que se tiene en la cultura y en la enseñanza, en particular con los tópicos que oponen cálculo y razonamiento[18], cálculo exacto y cálculo aproximado[19].

Una buena parte[20] del capítulo se dedica a mostrar una evolución de las relaciones que tiene el alumnado en el campo del cálculo dentro el conjunto de su escolaridad. El enfoque avanza desde sus primeros contactos con números, magnitudes, mediciones y dimensiones, hasta los pasos en la cadena cálculo con

[18] El cálculo se convierte en una actividad mecánica, automática, sin inteligencia, que se aprende a base de un entrenamiento puramente repetitivo. Es la parte baja del quehacer matemático, mientras que su parte noble se vincula con la resolución de problemas geométricos.

[19] El cálculo aproximado aparece como aquello con lo que se conforma el matemático cuando el cálculo exacto se vuelve inaccesible.

[20] Con perdón: treinta y seis octogesimonovenos, un poco más de cuarenta por ciento.

números/cálculo algebraico/análisis[21]. La reflexión no quiere acercarse a una programación, del parvulario a la universidad, sobre la enseñanza del cálculo. A diferencia de los capítulos anteriores, no se formula casi ningún comentario en función de las etapas del aprendizaje. Se destaca que no existe una verdad indudable, clara y sin tergiversación en esta materia a causa de la complejidad del mundo del cálculo, de su riqueza, de su progreso permanente y del papel que desempeña tanto en el desarrollo interno a las matemáticas como en sus relaciones de las matemáticas con las otras ciencias. Además, se subrayan algunos obstáculos inevitables que dificultan a menudo su gestión satisfactoria dentro de la docencia. El final del capítulo se orienta hacia cómo los vectores elegidos permiten pensar en una evolución afortunada de la enseñanza: reforzar las relaciones entre el razonamiento y el cálculo durante toda la escolaridad, ambicionar el desarrollo de un cálculo instrumentalizado de forma inteligente y controlada, equilibrar las relaciones entre cálculo exacto y cálculo aproximado, diversificar las relaciones con el cálculo según las necesidades del tipo de formación (general, profesional, por áreas), enriquecer los contextos matemáticos del cálculo y reforzar sus relaciones con las otras disciplinas, prever los equipamientos necesarios y adaptar la formación de los maestros.

Este libro no conviene a los aficionados del "prêt-à-porter" educativo o de la elección "à la carte". Tampoco es apto para aquellos que creen que, digan lo que digan, las matemáticas son lo que son, por lo tanto su enseñanza se debe conformar. Es preciso, sin embargo, para remediar el discurso de los partidarios del abandono, que sostienen: *ya que hay varias posturas epistemológicas en matemáticas y una gran variedad de estrategias en su didáctica, mejor dejar que actúen las fuerzas del "mercado" y así evitar el "formateo" innecesario de los alumnos en previsión de un futuro de todos modos incierto*. Para el docente, respetar al alumno no significa dejarle sólo en su construcción de nociones matemáticas, sino ser capaz de reconocer la legitimidad matemática de lo que sabe hacer el alumno y de poder enseñárselo. Para esto se exige a los especialistas una esfera de referencia consensuada y útil. Sobre la utilidad y las matemáticas Jean-Pierre Kahane dice:

[21]En el paso al análisis se menciona el papel esencial de la "approximation" (aproximación), no en el sentido de "valeur approchée" (valor aproximado), sino como herramienta fundamental en la construcción de conceptos que hacen intervenir la aproximación de números o funciones, el juego instaurado entre lo "local" y lo "global", el orden de magnitud, etc. Creemos que considerar la aproximación como elemento clave en el proceso de conceptualización evoca la cuestión de los "procepts" introducido por David Tall. En un contexto de límites y continuidad, este neologismo nace de la fusión en inglés de las primeras letras de *procedimientos* con las últimas de *conceptos* para integrar este primero a este segundo.

> *Ainsi les mathématiques sont utiles, plus utiles que jamais. Mais leur utilité même, aujourd'hui, les rends vulnérables. Le danger, c'est l'utilitarisme.*
> *L'utilitarisme consiste à donner des recettes au lieu de contribuer à la formation de l'esprit, à renoncer à l'universalité des mathématiques, à les diviser selon la nature actuelle de leurs applications sans souci des interactions possibles, et à constituer ainsi en vases clos séparés les mathématiques de l'ingénieur, de l'informaticien, du physicien, de l'économiste et ainsi de suite. Naturellement, les mathématiques peuvent et doivent être enseignées, dans les cursus professionnels ou supérieurs, en fonction des intérêts majeurs des étudiants, c'est-à-dire comme une discipline de service. Mais elles seront d'autant plus précieuses comme discipline de service qu'elles manifesteront leur spécificité, comme généralistes de la connaissance.*
> *À tous les niveaux, l'utilitarisme est menaçant, parce qu'il semble économiser le temps et les forces des professeurs et des élèves. [...] L'utilitarisme est à court terme, l'utilité est une vision à long terme*[22]*. (pp. 13-14)*

En una sociedad acomodada a la instantaneidad y al apresuramiento y que decide cada vez más en función de cálculos de riesgo, de estas palabras se desprende algo refrescante. Como lo dice el ministro Jack Lang a Jean-Pierre Kahane en su propuesta, *la enseñanza de las matemáticas es un tema sensible y estratégico.*

Philippe R. Richard
Département de didactique
Faculté de sciences de l'éducation, Université de Montreal
Pavillon Marie-Victorin 90, ave. Vincent-d'Indy
Montréal (Québec, Canada) H2V 2S9
correo electrónico: `philippe.r.richard@UMontreal.CA`

[22]Así las matemáticas son útiles, más útiles que nunca. Pero su misma utilidad, hoy en día, las hace vulnerables. El peligro es el utilitarismo.
El utilitarismo consiste en dar recetas en lugar de contribuir a la formación del espíritu, en renunciar a la universalidad de las matemáticas, en dividirlas según la naturaleza actual de sus aplicaciones sin preocuparse de las posibles interacciones, y en constituir así compartimentos cerrados y separados de las matemáticas del ingeniero, del informático, del físico, del economista y así sucesivamente. Naturalmente, las matemáticas pueden y deben enseñarse, en los cursos profesionales y superiores, en función del interés mayoritario de los estudiantes, es decir como una disciplina de servicio. Pero serán tanto más preciosas como disciplina de servicio, cuando manifiesten su especificidad, como generalistas del conocimiento.
A todos los niveles, el utilitarismo es amenazador, puesto que parece ahorrar el tiempo y las fuerzas de los profesores y alumnos. [...] El utilitarismo es a corto plazo, la utilidad es una visión a largo plazo.