PHILIPPE R. RICHARD

L'INFÉRENCE FIGURALE: UN PAS DE RAISONNEMENT DISCURSIVO-GRAPHIQUE

RÉSUMÉ. Cet article vise à légitimer l'emploi d'un registre graphique dans l'expression écrite du raisonnement mathématique. En plus de défendre cette légitimité, l'article montre les risques de cet emploi: les problèmes de communication qu'il cause ainsi que les difficultés, pour les enseignants, d'évaluer le raisonnement des élèves lorsqu'ils intègrent ces registres à leur solutions, et pour les élèves, de comprendre les textes mathématiques qui utilisent ces registres dans leur expansion discursive autrement qu'en illustration facultative. Avec les notions d'expansion graphique et d'inférence figurale, l'article prétend compléter l'ensemble des inférences des plans discursifs de Raymond Duval tout en respectant la définition fonctionnelle du raisonnement. Après la considération d'aspects cognitifs et sémiotiques relatifs à la notion de figure, l'article montre comment l'élève de l'école secondaire se sert de dessins pour structurer ses raisonnements. L'inférence figurale, qui naît de cette étude, est examinée puis définie en termes de fonction, de structure et de qualité.

MOTS-CLEFS: inférence figurale, expansion graphique, figure géométrique, registre de représentation sémiotique, raisonnement discursivo-graphique, image mentale, concept figural, procept géométrique.

RESUMEN. Este artículo tiene por objeto legitimar el empleo de un registro gráfico en la expresión escrita del razonamiento matemático. Además de defender esta legitimidad, el artículo muestra los riesgos de este empleo: los problemas de comunicación que causa así como las dificultades, para los profesores, de evaluar el razonamiento de los alumnos cuando integran estos registros a su solución, y para los alumnos, de entender los textos matemáticos que utilizan estos registros en su extensión discursiva diferentemente que en ilustración facultativa. Con las nociones de extensión gráfica y de inferencia figural, el artículo pretende completar el conjunto de las inferencias de los planes discursivos de Raymond Duval respetando al mismo tiempo la definición funcional de razonamiento. Después de considerar aspectos cognitivos y semióticos relativos a la noción de figura, el artículo muestra cómo el alumno de la escuela secundaria utiliza dibujos para estructurar sus razonamientos. La inferencia figural, que nace de este estudio, se examina y luego se define en términos de función, estructura y calidad.

PALABRAS CLAVES: inferencia figural, extensión gráfica, figura geométrica, registro de representación semiótica, razonamiento discursivo-gráfico, imagen mental, concepto figural, procepto geométrico.

ABSTRACT. This article aims at legitimating the use of the graphic registers in the written expression of mathematical reasoning. More than the defence of this legitimacy, the article shows also the risks of its use: the problems of communication which it causes as well as the difficulties, for the teachers, to evaluate the reasoning of the pupils when they integrate these registers into their solutions, and for the pupils, to understand the mathematical texts

Educational Studies in Mathematics **57:** 229–263, 2004.

which use these registers in their discursive expansions differently than optional illustration. With the concept of graphic expansion and figural inference, the article claims to supplement the inferences in Raymond Duval's discursive plans whilst respecting the reasoning functional definition. Having considered the cognitive and semiotic aspects in the definition of figure, the article shows the use of drawings in the reasoning structure of a pupil at secondary level. Figural inference born from this study is examined then defined in terms of function, structure and quality.

KEY WORDS: discursive-graphic reasoning, figural concept, figural inference, geometrical figure, geometric procept, graphic expansion, mental image, register of semiotic representation

1. INTRODUCTION

Notre article pose la question de la légitimation du raisonnement mathématique dans l'expression écrite qui considère conjointement les mots, les notations algébriques et, particulièrement, l'emploi des autres registres de représentation sémiotique en mathématique. On admet volontiers qu'un certain type de traitement opératoire se réalise sur ces registres pour appuyer un raisonnement discursif, mais on envisage rarement qu'ils puissent engager ou soutenir un pas de raisonnement reconnu comme tel. Pourtant, le développement des «mathématiques» ou des «preuves sans mots» depuis plusieurs années – comme dans les revues *The College Mathematics Journal* et *Mathematics Magazine* pour ne nommer que ces ouvrages – témoigne de raisonnements qui se structurent dans les «autres registres», que nous appelons génériquement «registres graphiques». De plus, les nouvelles possibilités représentatives engendrées par les calculatrices graphiques et les logiciels de géométrie dynamique, notamment avec l'interactivité et la représentation du mouvement, réclament une révision des rapports traditionnels entre les registres graphiques et le raisonnement.

On sait que l'exercice en mathématique est plutôt friand des registres graphiques et que leur mobilisation accompagne habituellement l'élève tout au long de sa scolarité. Par exemple, dans les manuels destinées à l'enseignement:

– on découpe des figures à l'aide de polygones appropriés pour provoquer une égalité ou une inégalité d'expressions algébriques (Bonnefond et al., 1999);
– on réarrange des pierres, des tuiles, des cubes, des nombres ou des expressions pour déclencher un raisonnement récursif ou pour réduire une série (Nelsen, 1993, 2000);
– on traduit des situations arithmétiques, logiques ou algébriques à l'aide de graphes pour faciliter la résolution de problèmes (Bachmakov, 1998; Fomin et al., 1996);

– on substitue des fonctions trigonométriques à l'aide de triangles rectangles de référence (Bradley et Smith, 1995);
– on calcule des probabilités conditionnelles sur un arbre pondéré (Gramirian et al., 1998);
– on simplifie la composition de transformations géométriques à partir de diagrammes (Brannan et al., 1999);
– on applique des grandeurs vectorielles sur le dessin de scènes de la vie quotidienne (Graner, 1998, 2003).

Cependant, l'emploi conjoint de plusieurs registres en classe de mathématique n'est pas un artifice pédagogique détaché du cadre épistémologique qui leur a donné naissance. Selon Duval (1995), il s'agit en fait:

> [d'] une donnée fondamentale de la fonction sémiotique chez l'homme: celle-ci y est liée à l'existence de plusieurs systèmes de représentation et à leur coordination. Chaque système de représentation ayant des propriétés spécifiques qui limitent intrinsèquement ses possibilités de représentation, des systèmes différents sont donc nécessaires. (p. 64).

Notre article se fonde alors sur la constitution multiregistre de la représentation et sur l'intégration du raisonnement dans l'activité cognitive qui procède en coordonnant des systèmes de représentation complémentaires. L'emprise tentaculaire du sujet, jointe à l'opportunité d'illustrer notre propos à partir de textes d'élèves de niveau secondaire, nous invitent à situer essentiellement les concepts didactiques dans le contexte géométrique.

2. AUTOUR DE LA NOTION DE FIGURE

Parmi les registres graphiques, le plus ancien est sans doute le registre figural. Dès l'Antiquité, la morphologie des objets se modélisait par des croquis aux lignes épurées. Mais ces mêmes croquis, à l'époque des Éléments, ne représentaient plus seulement des objets physiques. Grâce au raisonnement, on a pu abstraire des idéaux, dont les dessins en devenaient une représentation.

2.1. *Aspects sémiotiques*

Le mot représentation que nous venons d'utiliser possède deux acceptions. Déjà soulevé par Laborde (1994, p. 57–58), le dessin est un modèle de la figure (au sens de représentation sémiotique) qui, à son tour, est un objet mathématique issu du modèle euclidien (au sens de théorie représentante).

Cette distinction autorise la multiplicité des processus de représentation et de signification du registre figural. Autrement dit, si «un même objet mathématique peut être représenté par des unités figurales différentes» (Duval, 1995, p. 179), «un même support peut être utilisé pour différents modèles» (Laborde, 1994, p. 50). Selon Laborde et Capponi (1994, p. 168), ce sont les rapports du dessin à son référent, construit par le lecteur ou le producteur du dessin dans un contexte donné, qui constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet. Mais la distinction entre «matérialisation» et «modèle» de la figure permet aussi de souligner l'autonomie de l'ordre symbolique constitué par le dessin de celui du signifié, au sens développé dans l'œuvre de Lacan. Le dessin, en étant son propre modèle, peut s'articuler sans égard à un modèle théorique, comme s'il s'agissait d'un fait donné (Richard et Sierpinska, 2004). À l'illustration 1 par exemple, nous reproduisons la même situation sans entrée discursive. Le dessin de gauche montre un dessin «bien fait», c'est-à-dire un dessin qui respecte implicitement un modèle dans lequel les propriétés spatiales des formes représentées conviennent aux propriétés géométriques de l'idéal. Ainsi, un lecteur peut constater le caractère rectangle des triangles EFC, ADE et ABC, ou la nature carrée du quadrilatère DBFE, seulement à partir de leur forme respective. Dans cette «logique formelle», il peut même remarquer l'alignement des points C, E et A. Cependant, si la fausseté de cette dernière propriété n'est pas visuellement apparente, c'est à cause des limites représentationnelles du registre figural. Pour s'en rendre compte, il faudrait renvoyer aux propriétés géométriques de l'idéal en comptant sur les nœuds de quadrillage et en comparant les pentes des droites CE et EA (on trouve $\frac{5}{8} \neq \frac{8}{13}$).

Toutefois, le registre figural se constitue également avec des signes et des règles conventionnels. En situation d'enseignement, on se sert parfois de cette caractéristique – par exemple, en prétextant au tableau que l'on est un mauvais dessinateur – pour forcer un renvoi à un idéal géométrique tout en évitant les pièges de l'évidence visuelle. Dans le dessin de droite

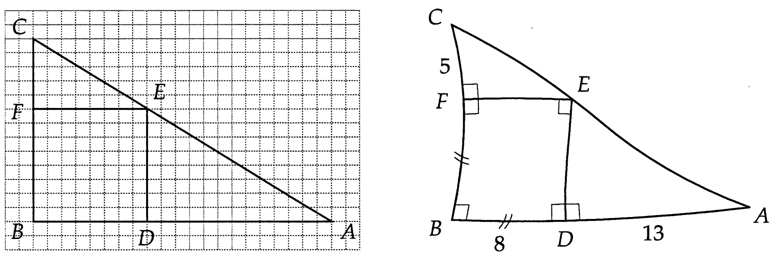


Illustration 1. Effets producteur et réducteur du registre figural.

(illustration 1), si on dégage le fait que les triangles EFC, ADE et ABC sont rectangles, ce n'est plus parce que l'œil en perçoit la nature à partir de propriétés spatiales, mais parce les «petits carrés» placés à l'intersection des «segments» correspondants renvoient à l'idéal par rapport à la référence instituée par ces signes. De plus, si on détermine que le quadrilatère DBFE est un carré, c'est que les signes figuraux (ou graphiques) permettent de reconnaître un rectangle (les quatre «petits carrés») avec une paire de côtés consécutifs de même longueur[1]. Par conséquent, même si toute représentation sémiotique est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente, on peut considérer qu'un dessin géométrique se constitue non pas uniquement à partir de formes représentées (comme chez Duval, 1995, p. 177), mais aussi à partir d'unités signifiantes élémentaires qui produisent des unités signifiantes complexes. Par analogie structurale au fonctionnement du discours, nous considérons que les unités signifiantes d'un dessin sont les signes élémentaires (comme le tracé d'un segment pour représenter une droite) qui se raccordent d'abord en syntagmes graphiques (v.g., le petit carré posé à l'intersection de deux segments pour signifier deux droites perpendiculaires), et ensuite à l'intérieur d'une proposition graphique (v.g., le dessin du carré DBFE) ou d'un assemblage de propositions graphiques (v.g., un des dessins complets de la situation de gauche ou de droite). On peut aussi parler de syntagmes graphico-symboliques lorsqu'on associe un symbole mathématique pur à un signe graphique (v.g., la lettre A qu'on accole au tracé du point).

2.2. *Aspects cognitifs*

On sépare généralement le processus de formation d'un concept figural du concept lui-même, tel que disponible en résolution de problème ou en situation de validation. Pour Fischbein (1993), la figure géométrique est une entité mentale construite par le raisonnement en géométrie. Cet auteur distingue le concept figural de sa définition formelle et de son image, qui s'appuie sur la perception sensorielle d'une représentation donnée d'un objet ou d'un phénomène, comme l'image visuelle du percept qu'est le dessin. Cependant, la «nécessité» épistémologique qui a engendré, à une époque ou à une autre, la notion de figure, n'est pas la même que la «logique» qui donne au concept figural sa signification. Dans la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990), l'élaboration des connaissances se fonde sur le sens des situations et des symboles (on pourrait dire «des registres») dans l'apprentissage des mathématiques. Même si Vergnaud envisage la

[1] Dans la section suivante, nous abordons la question de la multiplicité du processus de renvoi d'un même signe au même concept.

multiplicité de la représentation symbolique par rapport à un même concept, il ne considère pas les différents processus qui renvoient au concept mobilisé dans le fonctionnement du signe. Par exemple, sur le dessin de droite à l'illustration 1, la double coche sur les tracés des segments DB et BF peut renvoyer à leur «égalité» par une relation de congruence (au sens d'Euclide) ou par l'égalité de mesures ($BF = DB = 8$). La pluralité du processus cognitif par lequel un concept se forme, reconnu par Gray et Tall (1994), nous a conduits à considérer les concepts figuraux en procepts géométriques (Richard, 2004). Même s'il est cohérent par rapport à la situation dans laquelle il intervient, un procept géométrique peut manquer de cohérence globale dans la structure cognitive de celui qui la met en œuvre. De plus, la formation d'un procept n'est jamais achevée pour un apprenant et sa signification (d'origine situationnelle) doit se considérer réciproquement. Parce que si, selon Vergnaud (1990), un concept se compose en particulier à partir de l'ensemble des situations qui lui donne un sens, la (nouvelle) situation dans laquelle le concept serait sollicité est aussi une situation qui lui donne un sens. Ainsi, lorsque nous utilisons, au paragraphe *Aspects sémiotiques*, l'article indéfini «un» dans l'expression «pour forcer un renvoi à un idéal géométrique», c'est parce que nous souscrivons à la complexité des rapports entre un modèle et l'objet du modèle, au rôle subtil du registre figural dans la construction de ces rapports et à l'importance de la situation dans le processus de signification.

La perception visuelle ne retient pas toujours un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentés dans le modèle invoqué. Cette perception mobilise un capteur (l'œil) et un traitement sémiotique ou cognitif orienté par une finalité. Des auteurs, comme Bishop (1996), distinguent justement la procédure visuelle de l'interprétation de l'information figurale. Du point de vue sémiotique, les contraintes de l'environnement physique qui supporte le signe ne permettent pas toujours la représentation de certains faits, alors que le registre, lui, le peut, lorsqu'on admet que les images mentales constituent aussi un support des représentations figurales. Ceci est particulièrement visible en géométrie lorsqu'il s'agit de représenter le mouvement dans un processus de preuve, comme les transformations de triangles ou de quadrilatères qui maintiennent les mesures de leur base et de leur hauteur, mais qui changent de nature tout au long de leur transformation (v.g., Richard, 2003, Alsina, 2004). On peut ainsi générer, en fermant les yeux, le mouvement sur une même image mentale à partir du registre figural. L'idée de «fermer les yeux» n'est pas un artifice: il correspond à ce que Jackson (2002) appelle «l'œil de la pensée» (en anglais «mind's eye») que l'on accorde aux mathématiciens aveugles comme Bernard Morin. Il s'agit donc d'un traitement figural dans un processus démonstratif, ce qui suppose un contrôle à la fois cognitif et sémiotique sur l'image mentale qui bouge – on s'assure que la base et la hauteur des figures demeurent invariantes lors du mouvement. En fait, plusieurs «preuves sans mots» se présentent sous la forme de bandes dessinées (séquences de figures) qui retiennent ce que nous appelons des «moments significatifs» du processus de preuve. À la lecture de ces bandes dessinées, même si le mouvement est assuré par le développement d'images mentales intermédiaires, ce n'est pas tant les rapports du signifiant au signifié qui apparaissent au premier plan, contrairement à la représentation des moments significatifs sur papier, mais bien le contrôle de la représentation des images mentales par le raisonnement.

2.3. *Expansion graphique, raisonnement graphique*

Pour Duval (1995), la spécificité de l'activité géométrique ne consiste pas seulement dans une coordination nécessaire entre des traitements dans le registre des figures et celui de la langue naturelle. Il considère un traitement sur les figures qu'il appelle déroulement de l'appréhension opératoire des modifications possibles d'une même figure géométrique (ou de ses parties). Toutefois, cet auteur n'envisage pas de forme d'expansion graphique, au même titre que l'expansion discursive, et il estime que, pour exprimer un raisonnement, l'appréhension opératoire devrait se convertir dans le registre discursif. Et encore, en citant Mesquita (1989), il précise que la conversion du registre figural au registre discursif (figure → texte) pourrait ne pas traduire le raisonnement qui sous-tend le déroulement de l'appréhension opératoire, en ne décrivant que les phases du déroulement. Pourtant, l'exemple sur les transformations que nous avons évoqué au paragraphe précédent montre comment le registre figural peut à lui seul démontrer visuellement une propriété en fixant des «moments significatifs» du développement d'images mentales. Cela autorise la notion d'expansion graphique du registre figural qui permet de relier les unités signifiantes de dessins dans une démarche graphique:

- de description, lorsqu'un dessin est son propre modèle;
- d'explication, lorsqu'il s'agit de faire comprendre une idée en la développant à partir d'unités signifiantes d'un ou de plusieurs dessins;
- de raisonnement, pour modifier la valeur épistémique (au sens de Duval, 1995) d'une proposition graphique contenue dans un dessin, même si cette proposition n'est pas toujours très apparente à cause des limites représentationnelles du registre, ou que sa signification s'institue conjointement à l'aide d'un autre registre.

L'idée d'expansion graphique n'est pas contradictoire avec celle d'appréhension opératoire. Elle est complémentaire. À moins qu'un lecteur veuille expressément traduire les «moments significatifs» dans le registre algébrique par exemple, l'acceptation des preuves de Richard (2003) et de Alsina (2004) – qui établissent deux égalités et deux inégalités algébriques uniquement dans le registre figural – passe inévitablement par cette complémentarité constitutive du raisonnement graphique. S'il faut généralement introduire une situation de résolution de problème ou de validation à l'aide d'un texte qui peut inclure des graphies algébriques, c'est parce que le registre figural n'est pas une langue (Richard et Sierpinska, 2004). Contrairement aux énoncés complets du discours, le registre figural ne permet pas des démarches de récit, de commentaires ou d'argumentation. Par contre, la remarque de Mesquita (1989) s'applique à l'une des caractéristiques des «preuves sans mots». Bien que ce type de preuve autorise le registre algébrique, par exemple, pour la mise en équation, le traitement ne s'effectue pas par expansion dans ce registre. La mise en équation sert à décrire un élément pertinent d'un «moment significatif» issu de l'expansion graphique ou de l'appréhension opératoire, la plupart du temps par souci d'efficacité ou d'économie communicationnelle – le producteur de la preuve considère qu'un équivalent figural serait plus lourd à gérer dans le processus de communication avec le lecteur. À part quelques exceptions, notamment chez Nelsen (1993, 2000), les «preuves sans mots» se fondent essentiellement par raisonnement graphique.

2.4. *Raisonnement discursivo-graphique*

La notion de «discours» que nous utilisons provient de la théorie des fonctions du langage de Duval (1995) et celle de «raisonnement discursif» découle de ses analyses fonctionnelle et structurale du raisonnement. Du point de vue fonctionnel:

> Le raisonnement peut (alors) être défini comme la forme d'expansion discursive qui est orientée vers un énoncé-cible dans le but:
>
> – de modifier la valeur épistémique, sémantique ou théorique, que cet énoncé-cible a dans un état de connaissances donné, ou dans un milieu social donné,
> – et, par voie de conséquence, d'en modifier la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation discursive sont remplies. (p. 233).

Cette définition suppose que le raisonnement discursif circule sur deux plans: un premier, argumentatif, qui répond à des critères dialogiques; un deuxième, déductif, qui se soumet à des principes logiques. Une analyse des formes du raisonnement inclut l'idée d'unités discursives organisées entre elles selon des modalités propres à chaque forme. Duval reconnaît quatre pas de raisonnement (organisation possible de l'expansion discursive d'une

TABLEAU 2
Les quatre pas de raisonnement de Duval (1995, p. 238)

	Sans *statut opératoire*	Avec *statut opératoire*
Sans *énoncé-tiers*	INFÉRENCE SÉMANTIQUE	SYLLOGISME ARISTOTÉLICIEN
Avec *énoncé-tiers*	INFÉRENCE DISCURSIVE	DÉDUCTION

ou de plusieurs propositions discursives données) qui se distinguent selon le statut opératoire des propositions discursives (prémisse, conséquence) et la présence d'énoncés-tiers (énoncé intermédiaire dont le contenu ou l'organisation interne sert à tirer la conséquence). Nous les résumons au tableau 2. Sans la notion d'inférence figurale introduite à la section suivante, nous ne pouvons pas aborder spécifiquement les aspects structuraux du raisonnement discursivo-graphique. Nous devons néanmoins annoncer qu'il s'agit d'un type de raisonnement qui s'articule à partir de propositions discursives et de propositions graphiques. De plus, il respecte la définition fonctionnelle du raisonnement discursif de Duval. Dans cet esprit, nous traitons maintenant un aspect relatif à la coordination entre registres.

Lorsqu'un élève passe d'un énoncé à un dessin, ou d'un dessin à un texte, la coordination entre les registres discursif et figural suppose une activité cognitive de conversion qui renvoie au même objet, même si le processus de renvoi à l'idéal peut être différent. Par exemple, il peut très bien lire dans l'énoncé d'un problème qu'un triangle ABC est isocèle en A, le représenter par un dessin, dégager que A est équidistant de B et de C, puis écrire «BA = AC». Il est facile d'en conclure qu'effectivement, il a su coordonner les registres discursif et figural pour produire une conséquence vraie à partir de la définition du triangle isocèle. Pourtant, au moment où il dégage la propriété d'équidistance, on ne peut pas savoir si cet élève change de modèle ou non, c'est-à-dire s'il perçoit l'équidistance seulement par rapport à une propriété spatiale du dessin, ou s'il effectue aussi un contrôle dans un renvoi à la figure. Dans cet exemple (sans contexte, mais sans problème au niveau représentationnel), un dessin «bien fait» ne conditionne peut-être pas la conséquence, mais il pourrait y avoir en outre une activité cognitive de traduction lors d'un changement de modèle. On pourra consulter Richard (2004) pour des situations dans lesquelles des élèves changent ainsi de modèle au cours du passage énoncé → dessin → texte. En plus d'une alternance entre registres, ce type de passage, tout comme le raisonnement qui s'articule à partir de propositions graphiques, doit assumer la possibilité d'un traitement cognitif et sémiotique qui procède par conversion et par traduction.

3. L'INFÉRENCE FIGURALE

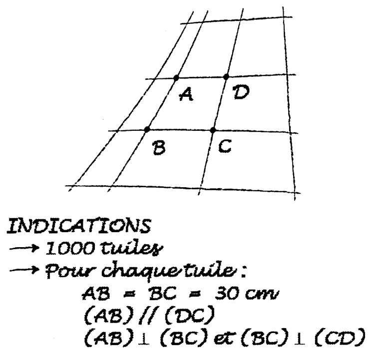
3.1. *Apparition*

Dans le cadre d'un diagnostic sur les stratégies de preuve et sur le raisonnement employés en géométrie par des élèves de niveau secondaire (Richard, 2004), nous avons proposé, à une soixantaine d'élèves, cinq problèmes qui détachaient la situation de validation d'un moment préliminaire pendant lequel il fallait choisir ou formuler une conjecture. Les preuves individuelles se réalisaient sur des feuilles vierges en disposant uniquement d'un stylo pour écrire. Même si leurs habitudes discursives ne pouvaient pas compter sur la syntaxe déductive, ces élèves étaient familiers avec les propriétés élémentaires de la géométrie euclidienne. De plus, ils possédaient une certaine compétence sur les constructions traditionnelles à la règle et au compas. À partir de deux exemples, nous montrons que pour susciter ou justifier certains pas de raisonnement, l'élève introduit un dessin ou une bande dessinée à la structure discursive de sa preuve. Chaque exemple débute avec une analyse a priori de la tâche proposée.

3.1.1. *Exemple 1*

À l'aide d'un questionnaire, nous avons posé un problème qui demandait d'établir une conjecture sur la nature d'un quadrilatère particulier

> Pour paver le plancher d'une navette spatiale en construction à l'aide de tuiles identiques, le docteur Vavite a rendu au responsable du projet une esquisse avec des indications et, ensuite, est parti en vacances pour deux semaines dans le Grand Nord.



> Parce que chaque tuile doit être fabriquée avec une grande précision, que les matériaux et le coût de production sont très élevés et que le travail doit être terminé au plus tard dans une semaine, le responsable du projet doit s'assurer *à tout prix* de la nature du quadrilatère ABCD, sans pouvoir compter sur une aide éventuelle du docteur Vavite.

Situation 3. Énoncé du problème.

(situation 3). Puisque l'énoncé du problème compte sur un dessin esquissé approximativement en perspective et qu'une simple lecture des «indications» est insuffisante pour dégager une conjecture, la situation presse la construction d'une figure. Mais une des hypothèses sur la perpendicularité est superflue et la nature du quadrilatère n'est pas déterminée. On peut choisir entre un carré ou un trapèze.[2] Ainsi, l'élève devra distinguer les hypothèses essentielles de celles qui sont accessoires tout en considérant les hypothèses comme un ensemble cohérent, malgré l'incertitude sur la nature du quadrilatère. Cela devrait embarrasser l'élève au point d'éveiller en lui un besoin d'explication qui suppose l'investissement personnel dans un processus de preuve sur la base de la conviction raisonnable. De plus, le problème se situe dans un contexte qui permet d'introduire des contraintes de temps, d'éloignement et de fabrication. Puisque l'esquisse et les «indications» rassemblent les éléments mathématiques pertinents, nous utilisons ces contraintes pour attribuer une valeur épistémique à l'énoncé-cible du raisonnement (il faut s'assurer *à tout prix* de la nature du quadrilatère). Cette disposition est susceptible d'encourager la rédaction d'une preuve convaincante pour un tiers (éventuellement le responsable du projet), et le jeu d'écriture-relecture présumé devrait profiter à la communication avec l'éventuel lecteur – et, par conséquent, faciliter l'interprétation du sens véhiculé par les signes (mots, symboles mathématiques, signes graphiques) et les arguments de la preuve écrite.

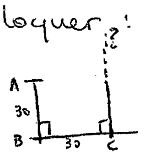
De façon générale, nous nous attendions à ce que l'élève procède en trois phases: construction d'un dessin au brouillon, dégagement d'une conjecture puis rédaction d'une preuve au propre. La problématique de la construction est à la fois sémiotique et cognitive. Dans un premier jet, il est naturel de suivre les indications comme s'il s'agissait d'un protocole. Néanmoins, l'élève doit rapidement surmonter la difficulté de représenter l'hypothèse (AB) // (DC) sur papier. À ce moment, puisqu'il faut respecter l'ordre des points fixé par l'esquisse, il sait seulement que le point D se situe «au-dessus» du point C. Il pourrait tracer temporairement une parallèle passant par le point C, ou attendre un tant soit peu pour considérer conjointement les deux hypothèses sur la perpendicularité. Mais dans chaque cas, l'indétermination sur la position du point D obligera l'élève à combiner, ajuster ou intégrer les modèles qu'il connaît en coordonnant un traitement sur les registres des figures, des symboles mathématiques et de la langue naturelle. À ce problème de traitement sémiotique et cognitif pour dégager une conjecture s'ajoute celui de trouver un moyen de communiquer cette

[2] En français, l'acception géométrique de «trapèze» ne fait pas l'unanimité, puisque coexistent la définition inclusive «carré $\subset$ trapèze» (Petit Larousse, 1998) et la définition exclusive «carré $\not\subset$ trapèze» (Dictionnaire universel francophone Hachette, 1997).

conjecture et de l'expliquer dans la rédaction au propre. La preuve écrite nous permet alors d'examiner les rapports entretenus entre les différents registres mobilisés et le raisonnement sous-jacent.

Lorsqu'on procède à une analyse structurale de la sémiotique du texte 4 selon les plans discursifs, on est confronté à l'impossibilité d'appliquer les pas de raisonnement de Duval sans prendre en considération les dessins. Ainsi, la proposition «on peut seulement placer: AB, BC et CD (mais pas sa mesure)» apparaît comme une conséquence discursive de la prémisse «avec ce qu'on a». Toutefois, l'élasticité d'acception du verbe avoir, qui prête certainement à plusieurs interprétations, empêche l'acceptation de l'inférence par le contenu sémantique de la prémisse discursive. Par contre, si on considère le sens qui se dégage des propositions graphiques

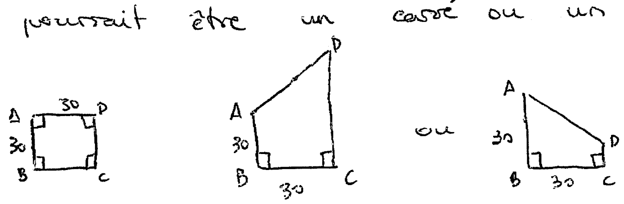
C'est impossible de construire tel quadrilatère
avec les indications données.
Avec ce qu'on a, on peut seulement ~~faire :~~
coloquer : AB, BC et CD (mais pas sa mesure)

❶ 

~~Pour~~

On ne peut pas le construire parce que
on ne sait pas ni si AD est perpendiculaire
a AB ou paralel a BC et on ne sait nonplus
la mesure de DC.

Il pourrait être un carré ou un trapèze :

❷ 

Texte 4. Solution obtenue à la situation 3.

du dessin (1),[3] on peut non seulement identifier une inférence structurée, mais on accepte volontiers la conséquence. Autrement dit, les propositions graphiques du dessin (1) jouent un rôle d'énoncé-tiers (graphique) d'un pas de raisonnement. Cette structure évoque, d'une certaine manière, l'inférence discursive. De façon similaire, la bande dessinée (2) permet d'accepter la conséquence «il pourrait être un carré ou un trapèze» à partir de la prémisse «on ne peut pas le construire». Regardons de plus près l'intervention de ces dessins dans l'expression écrite du raisonnement.

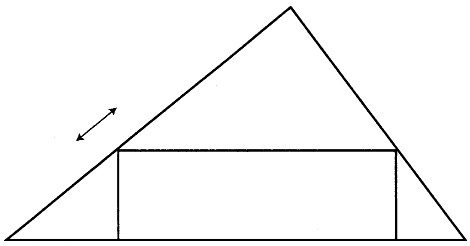
Au dessin (1), le «petit carré» qui représente un angle droit et le trait plein qui se poursuit en pointillé témoignent du fait que l'élève a su résoudre la difficulté de représenter l'hypothèse (BC) $\perp$ (CD) – ou de sa considération conjointe avec l'hypothèse (AB) // (DC). En ajoutant un point d'interrogation sur le segment pointillé, il montre de façon positive et très apparente où se situe l'indétermination du point D. Pour lui, le point D se trouve quelque part «en haut» de la droite (BC), ce qui est corroboré par l'intégration subséquente de la bande dessinée (2) au texte. Sur papier brouillon, l'élève avait commencé par exprimer, en propositions graphiques, les «indications» sur un même dessin, la seule production sémiotique visible avant la rédaction de la preuve. Ce dessin est isomorphe au dessin (1), sauf qu'il ne montrait pas de segment pointillé ni de point d'interrogation. Au terme du processus de construction, l'élève a vraisemblablement dû raisonner graphiquement sur son dessin pour vérifier qu'effectivement les «indications» ne sont pas suffisantes pour caractériser un quadrilatère particulier. C'est probablement à partir de ce moment qu'il a décidé de rédiger sa preuve en énonçant d'abord la conjecture «c'est impossible de construire [un] tel quadrilatère avec les indications données». Ensuite, il commence son raisonnement en spécifiant que «ce qu'on a» permet seulement de placer «AB, BC et CD (mais pas sa mesure)». Il juge sans doute que cette inférence n'est pas convaincante dans sa forme actuelle et qu'il a besoin d'un dessin pour la soutenir. Cette fois, il montre un dessin qui pose une question (avec le signe «?» accolé au segment pointillé). C'est-à-dire qu'il se sert du registre figural pour préjuger l'indétermination du point D, comme s'il s'agissait d'une interrogation oratoire en linguistique[4] Grâce au dessin (1), l'élève manifeste une reconstruction cognitive par rapport à la signification de «ce qu'on a», production sémiotique antérieure à la représentation du dessin. De fait, en connaissant les hypothèses du problème, le lecteur peut comprendre quelle est la question posée seulement à partir du registre figural, mais sans le dessin, il

[3] Pour mettre en évidence les références dans le texte de l'élève, nous les avons placées dans un disque noir.
[4] Cela est le cas, par exemple, dans les questions «l'eusses-tu cru?» ou «qu'alors y faire?».

ne pourrait jamais saisir l'idée essentielle qui autorise l'inférence (modification des valeurs épistémique et sémantique de la proposition discursive conséquente dans l'état des connaissances rendu à cette étape du raisonnement). En intégrant le registre figural au texte, l'élève demande au lecteur de coordonner un traitement sémiotique et cognitif dans un pas de raisonnement structuré.

Après la première inférence, le lecteur devrait accepter l'existence d'une incertitude sur le quadrilatère, mais il pourrait encore ignorer la cohérence et la nature de cette incertitude qu'il faut lever «à tout prix». L'élève poursuit son raisonnement en écrivant «on ne peut pas le construire» (que nous appelons «proposition **Q**» pour la suite). On peut être tenté de croire qu'il s'agit simplement d'une réitération de la conjecture exprimée dans la première phrase du texte. Toutefois, les valeurs sémantique et épistémique de la proposition **Q** changent. En premier lieu, puisque l'élève vient justement de conclure qu'«on peut seulement placer: AB, BC et CD (mais pas sa mesure)», la signification de la conjecture se précise et cela modifie inévitablement le sens de la proposition **Q**. En second lieu, même si cette proposition apparaît en début de phrase, elle est suivie d'une proposition qui commence par une locution conjonctive et qui clarifie ce qui n'est pas su dans ce que l'on connaît (proposition **P**: «parce qu'on ne sait pas ni si AD est perpendiculaire à AB ou parallèle à BC et on ne sait [pas] non plus la mesure de DC»). La proposition **P** s'ajoute ainsi à la conséquence de la première inférence pour intervenir en prémisse d'une inférence sémantique dont la conséquence est la proposition **Q**. Parce que si, en outre, on ne sait pas cela, on ne peut toujours pas construire le quadrilatère ABCD. Bien que le raisonnement puisse paraître encore incomplet pour emporter la conviction sur la conjecture, la deuxième inférence permet pourtant au lecteur d'en augmenter le caractère de vraisemblance.

En guise de conclusion, l'élève enchaîne avec une proposition discursive qui détermine la nature du quadrilatère (proposition **R**: «il pourrait être un carré ou un trapèze). Il fait suivre cette proposition d'une séquence de dessins qui exhibe les positions du point D jugées pertinentes (bande dessinée (2)). L'élève a impérativement besoin du potentiel représentatif du registre figural pour justifier l'introduction soudaine de la proposition **R**. Sans la contribution du sens issu des propositions graphiques de la séquence, alors que le raisonnement vient de préciser pourquoi on ne peut pas construire le quadrilatère ABCD, l'apparition de la proposition **R** constituerait une sorte de paradoxe sémantique. La difficulté à pouvoir représenter le quadrilatère est au cœur de la démarche. Elle soulève la question de l'intention ou de la capacité à représenter les modèles que l'élève connaît, dans les contraintes de l'environnement papier-crayon, pour assurer la coordination du traitement entre les registres figural et discursif.



– Tracer un triangle quelconque, en plaçant sur la feuille un côté à l'horizontale.
– Y inscrire un rectangle de manière à ce qu'une base du rectangle coïncide avec le côté à l'horizontale du triangle.
– Ainsi, le sommet du rectangle qui se trouve en haut à gauche peut se déplacer sur le côté gauche du triangle.
– On veut situer le sommet précédent, sur le côté du triangle, pour que l'aire du rectangle soit maximale.

Situation 5. Éléments constitutifs du problème.

Si la représentation de la conjecture sur papier est ardue, il en va autrement lorsque le support est une image mentale. Quelques jours après le passage du questionnaire, nous avons interrogé l'élève en prétextant que nous voulions être sûr de comprendre le texte sa preuve. Il justifia oralement sa conjecture, d'abord en déplaçant ses doigts sur le dessin (1), puis en dessinant en l'air, avec sa main gauche, le côté AD qui monte et qui descend par rapport au côté BC du dessin. Nous interprétons ce geste comme un effet symptomatique d'une image mentale qui «bouge». Autrement dit, la bande dessinée (2) communique efficacement une image mentale difficile à représenter sur papier en économisant la production d'un développement discursif substitutif. Pour que le lecteur puisse accepter l'établissement de la proposition **R**, il doit dégager les connaissances que l'élève voulait communiquer en raisonnant graphiquement sur les dessins et convertir les propositions graphiques pertinentes au registre discursif.

3.1.2. *Exemple 2*

La situation proposée dans cet exemple est beaucoup plus complexe que la précédente. En pouvant tabler sur un logiciel de géométrie dynamique (Cabri-géomètre II[5]), le problème repose sur l'optimisation de l'aire d'un rectangle inscrit dans un triangle quelconque (situation 5). Bien que la médiation du logiciel est susceptible de faciliter le dégagement d'une conjecture, notamment avec la fonctionnalité «aire» qui calcule automatiquement une approximation de l'aire d'un polygone construit, le logiciel ne dévoile pas la rationalité sous-jacente à ce calcul. Mais pour éviter de suggérer, dès le départ, une heuristique qui repose sur des considérations

[5] Bellemain, F., Laborde, J.-M., Université Joseph Fourier, Grenoble I (1988–1996), version 1.1, éditée par Texas Instruments.

analytiques, nous avons introduit la situation sans mesure et sans étiquettes (pas de lettres pour désigner les sommets ou la mesure des côtés). Les éléments du problème ont été énoncés individuellement par interaction sociale: communication orale et gestuelle, dont le dialogue était possible pour assurer la dévolution du problème tout au long du processus de résolution. Nous avons parfois cherché à élever la valeur épistémique accordée à la conjecture. À la suite d'une question de l'élève qui s'y rapportait et en évitant d'intervenir en deus ex machina[6], nous lui demandions: «es-tu sûr?». Si la dévolution du problème constitue une première difficulté, les compétences nécessaires à sa résolution et à la communication d'une solution écrite exigent de l'élève une plus grande autonomie de gestion:

– dans l'organisation du problème sous une forme sémiotique et cognitive différente, comme celle qui s'attache à la représentation et à l'interprétation d'un dessin dynamique;
– dans les conditions ergonomiques de l'environnement, comme le contrôle de l'action ou de la réflexion dans les allers-retours entre l'interface (écran-souris-clavier) et les feuilles (papier-crayon).

Selon les stratégies de résolution disponibles, nous nous attendions à ce que l'élève invoque la propriété de Thalès pour comparer les rapports d'aire de sous-figures ou pour modéliser l'aire du rectangle à l'aide d'une fonction. Les élèves ne connaissent pas la dérivée, mais ils ont déjà été amenés à résoudre des problèmes d'optimisation lorsque le modèle est une fonction quadratique. En outre, dans leur enseignement régulier, ils ont dû appliquer certains arguments visuels, comme ceux qui soutiennent les identités remarquables (carré d'une somme, d'une différence; différence de deux carrés), la formule pratique de complétude du carré ($x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$) ou l'égalité de Pythagore (v.g., Nelsen, 1993, 2000). Cependant, l'usage du Cabri-géomètre en classe s'était alors limité à la construction de figures dans l'esprit euclidien de la règle et du compas, sans considérations proprement métriques – les figures sont «égales» si elles sont congruentes. Après l'appréhension de la situation, nous nous attendions à un déroulement qui respectait grosso modo les phases suivantes:

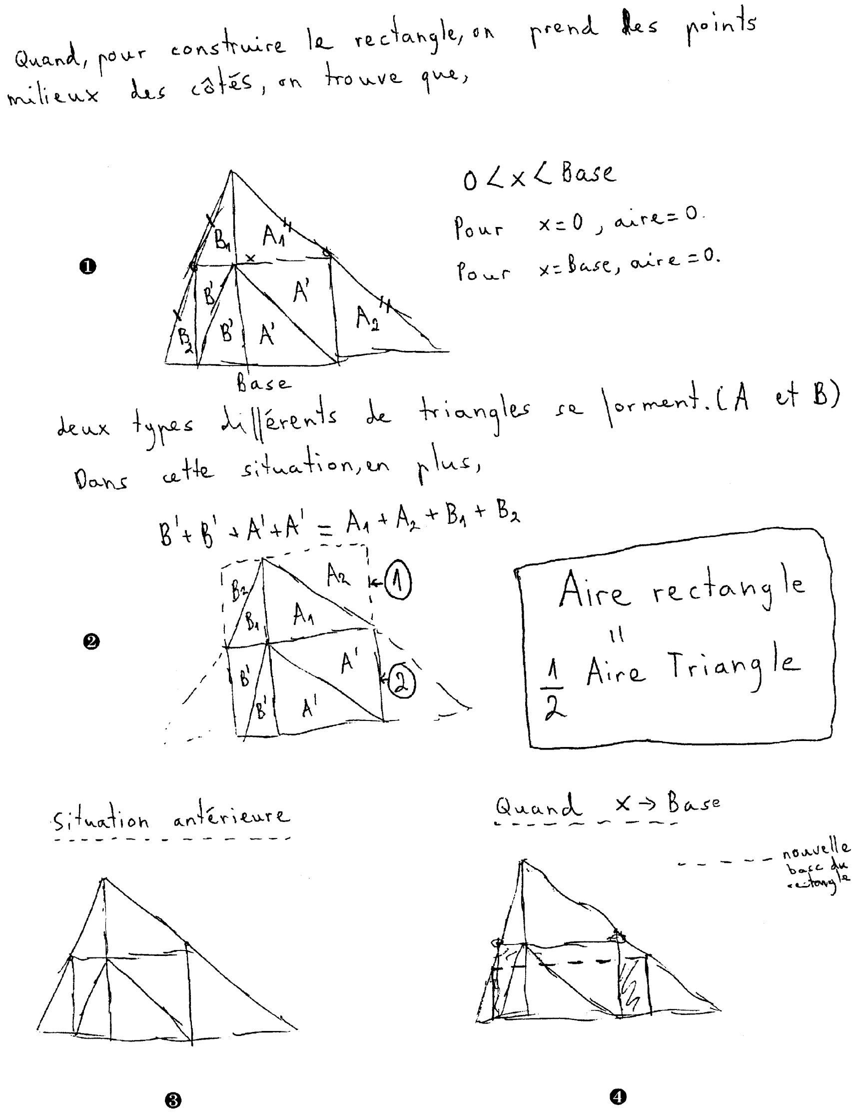
– construction d'un dessin dynamique (que nous appelons «cabri-dessin» pour la suite) dans la fenêtre du logiciel;
– expérimentation à l'interface du dispositif informatique pour formuler une conjecture primitive, la confirmer ou la réfuter dans le jeu de l'action-interaction, en alternance éventuellement avec le papier brouillon;
– rédaction au propre d'une preuve pour défendre la première conjecture jugée «suffisamment sûre».

[6] De toute façon, nous n'avons pas eu à dénouer d'impasse dans cet exemple.

La complexité de la situation et les contraintes de l’espace nous empêchent d’effectuer une analyse a priori aussi précise que dans l’exemple 1. Nous devons toutefois souligner certaines particularités du traitement sémiotique et cognitif escompté. Pendant et après la première phase, l’élève pourra modifier son cabri-dessin et le doter de mouvement. L’animation d’un dessin dynamique rend plus apparentes les limites traditionnelles des possibilités représentatives du registre figural tout en diminuant l’écart entre la représentation physique et la représentation par images mentales. Mais la logique de la construction est différente de celle qui renvoie à la figure et le contrôle des propriétés géométriques qui demeurent invariantes lors du déplacement du rectangle est géré par le logiciel. En perdant de vue la construction de la figure, l’élève pourrait facilement considérer le cabri-dessin comme un objet, voire un milieu d’expérimentation. Si l’élève dégage sa conjecture en comparant l’aire de sous-figures et qu’il intègre des dessins à l’expansion discursive de sa preuve, le modèle qui représente un dessin donné peut aussi bien être un procept géométrique qu’un cabri-dessin – qui pourrait éventuellement renvoyer à un procept géométrique différent. Dans la coordination du traitement des registres figural et discursif, le raisonnement associé au processus de rédaction devrait constituer un terreau fertile pour l’activité cognitive qui procède tantôt par conversion, tantôt par traduction entre registres. La preuve achevée devrait alors montrer une structure discursivo-graphique assez audacieuse.

Pour éviter l’effet de répétition, l’analyse ci-dessous appuie sur les caractéristiques dominantes du texte 6 en ce qu’elles ont de particulier par rapport à l’analyse précédente. Pour les besoins de notre exposé, nous résumons l’organisation discursivo-graphique du texte 6 au schéma 7, c’est-à-dire la disposition des pas de raisonnement identifiés dans le corps de la preuve. Ce schéma détermine implicitement l’inférence figurale de structure ternaire – que nous généralisons par la suite à la section *Fonction, structure et qualité*. Parce que les pas de raisonnement sont relativement indépendants les uns des autres, nous les regroupons selon la tâche spécifique qu’ils accomplissent dans la preuve. À l’exception du fait que l’élève n’a jamais utilisé de papier brouillon et hormis certains allers-retours entre le dispositif informatique et la copie au propre, la démarche de l’élève s’est inscrite dans les phases attendues. Notons d’entrée de jeu que le cabri-dessin, au terme de la deuxième phase, est isomorphe au dessin (1), sans marques graphiques ni symboles de désignation.

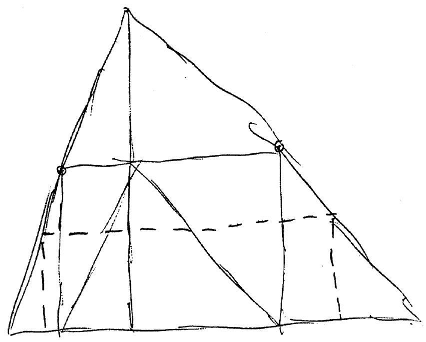
Ce qui frappe et tire l’œil dans la preuve est la richesse de la production sémiotique. L’élève montre six dessins qui se forment dans deux registres (celui des figures et des représentations graphiques de fonction) et qui introduisent une bonne demi-douzaine de signes éloquents (coches, lignes pointillées, zones ombrées, points gras, mots ou symboles de désignation). Lorsqu'on examine sommairement l'expansion discursive, on remarque tout de suite le rôle crucial attribué aux dessins. Si on les escamotait, on



Texte 6. Solution obtenue à la situation 5.

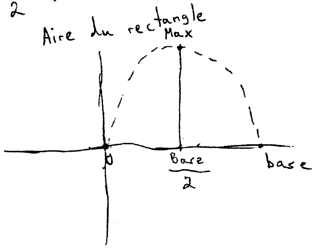
(*Continued on next page*)

❺



lorsque x tend vers $\underline{0}$ ou lorsque x tend vers $\underline{\text{base}}$ on observe que l'aire du rectangle diminue tandis que l'aire du reste du triangle augmente. (pour $x = \frac{\text{base}}{2}$, ces deux aires étaient égales)

❻



Texte 6. (*Continued*).

Expérimentation sur l'effet de la conjecture

Quand, pour construire le rectangle, on prend les points milieux des côtés $\overset{\text{Dessin ❶}}{\Longrightarrow}$ On trouve que, deux types différents de triangles se forment (A et B) $\overset{\text{Dessin ❷}}{\Longrightarrow}$ Dans cette situation, en plus, Aire rectangle $= \frac{1}{2}$ Aire triangle

Traitement des cas limites

$0 < x < \text{Base}$ $\begin{cases} \text{Pour } x = 0 \overset{\text{Dessin ❶}}{\Longrightarrow} \text{aire} = 0 \\ \text{Pour } x = \text{Base} \overset{\text{Dessin ❶}}{\Longrightarrow} \text{aire} = 0 \end{cases}$

Expérimentation sur la négation de la conjecture

$\left.\begin{array}{c} \text{Lorsque x tend vers 0} \\ \oplus \\ \text{Ou lorsque x tend vers base} \end{array}\right\}$ $\overset{\text{Bande dessinée ❸ ❹ ❺}}{\Longrightarrow}$ On observe que l'aire du rectangle diminue tandis que l'aire du reste du triangle augmente

Confirmation de la conjecture

Pour $x = \frac{\text{base}}{2}$ $\overset{\text{Dessin ❻}}{\Longrightarrow}$ Ces deux aires étaient égales

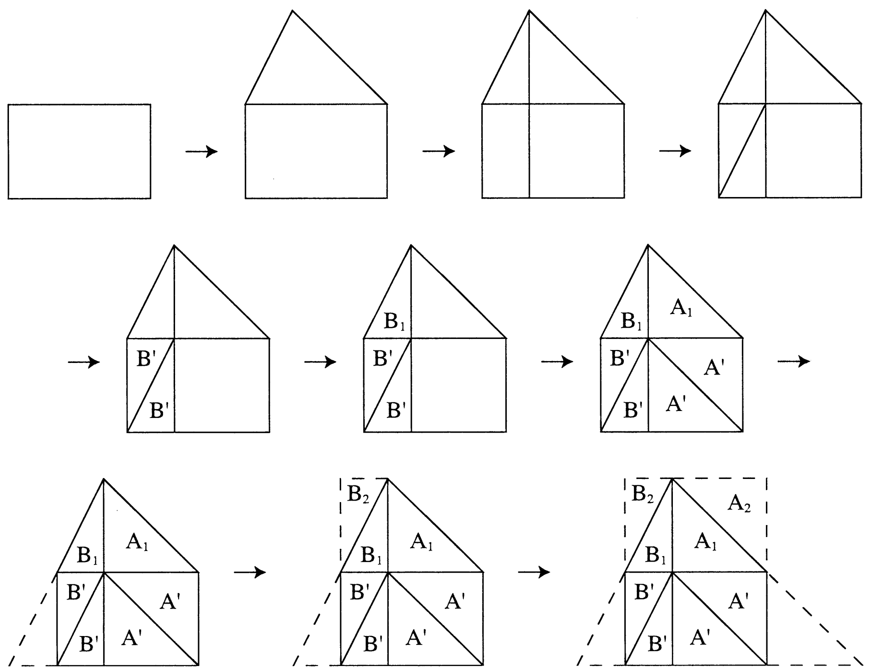
Schéma 7. Organisation discursivo-graphique du texte 6.

ne pourrait jamais découvrir quelque organisation discursive que ce soit. Montrons que les dessins (1)-(2)-(6) et la bande dessinée (3-4-5) cimentent toutes les propositions discursives en intervenant comme énoncés-tiers graphiques. Dans ce type de structure inférentielle, le dessin (1) joue un double rôle. Il permet, d'une part, de modifier la valeur sémantique de la proposition «on trouve que, deux types différents de triangles se forment (A et B)» sous l'hypothèse de la conjecture (première inférence, schéma 7). On pourrait croire que le dessin sert uniquement de support physique pour définir les triangles «A et B», mais, en fait, il véhicule un raisonnement. L'usage répété du symbole «A′» ou «B′» au sein du rectangle provient de la découverte d'une égalité d'aire dans le découpage proposé. Si l'élève indique quels sont les «deux types différents de triangles [qui] se forment», le lecteur sait aussi que deux paires de triangles ont la même aire. D'autre part, l'élève ajoute deux inférences à la droite du dessin. Il déduit que l'aire du rectangle est nulle pour x = 0 et pour x = Base. En ne disposant pas de cabri-dessin pour agir sur celui-ci, le lecteur doit imaginer un rectangle qui dégénère en un segment pour chaque cas traité. Autrement dit, en l'absence d'un autre modèle que celui qui découle du dessin (1), l'acceptation de la conséquence «aire = 0» passe par un raisonnement graphique sur le dessin – ce qui, par ailleurs, est fortement suggéré par le voisinage du dessin dans le texte.

La preuve enchaîne par la mise en valeur d'un rapport numérique. Figure en tête ou cabri-dessin à la main, l'élève a besoin de spécifier ce qu'il faut dégager «dans cette situation, en plus». Puisque l'égalité suivante précède le dessin (2) dans le texte:

$$B' + B' + A' + A' = A_1 + A_2 + B_1 + B_2 \,(\mathbf{E})$$

on pourrait croire que l'élève tire sa conséquence par expansion discursive et que le dessin ne serait qu'une illustration de **E**. Non seulement on peut le croire, mais il s'agit d'une interprétation possible du lecteur. Avec la présence des signes ❶et ❷qui ne paraissent nulle part ailleurs et le filet qui entoure la conséquence «aire du rectangle = $\frac{1}{2}$ aire du triangle» (proposition **C**), il semble qu'on veuille souligner que si l'aire des deux rectangles est égale, alors l'aire du rectangle de la conjecture est forcément la moitié de l'aire du triangle – sous entendant, comme dans une inférence sémantique, une propriété du type «si, dans une figure, l'aire d'une région est égale à l'aire de son complémentaire, alors l'aire de la région vaut la moitié de l'aire de la figure». Néanmoins, l'intention de l'élève n'était pas aussi nette. Lors de la représentation du dessin (2) nous avons observé la logique suivante:



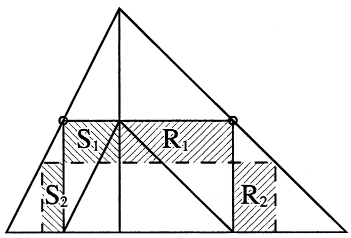
On constate que l'attention se centre sur le rectangle et sur son chapeau triangulaire. Durant le découpage de la figure, l'élève reporte les symboles B', B_1, A' puis A_1 du dessin (1); il construit cette fois deux nouveaux triangles pour y placer les symboles B_2 et A_2. Subséquemment, il écrit l'égalité **E**, sans consulter son cabri-dessin. Il est fort probable que cette égalité convertit, dans le registre algébrique, une proposition graphique jugée pertinente, mais difficile à signifier. L'élève aurait pu marquer «①= ②» près du dessin, mais ces signes sont apparus après l'écriture et l'encadrement de la proposition **C**. Comme s'il avait voulu mettre en valeur l'origine figurale de la justification de l'inférence. De plus, parce que l'élève n'a pas exhibé de considérations analytiques sur le parallélisme, les angles ou les formules d'aire, nous lui avons demandé, après la remise de sa solution, comment il établissait la proposition **C**. En nous répondant que «ça se voyait», il s'est retourné vers l'ordinateur pour nous indiquer des comparaisons de sous-figures avec le curseur. Puisque le cabri-dessin, lui, n'est pas découpé en sous-figures, nous avons renchérit sur cette demande. Il a réclamé son texte, puis il a repris l'explication avec ses doigts sur les triangles du dessin (2), mais en invoquant cette fois la propriété de Thalès. Bien que nous ne puissions pas être sûr si cette dernière réponse coïncidait avec son approche d'alors, il est raisonnable de croire:

– que l'élève ait profité du caractère «bien fait» du dessin à l'écran en fondant une partie du raisonnement graphique à partir de propriétés spatiales;
– qu'il était conscient, en esquissant le dessin (2), d'un certain renvoi à un modèle autre que le dessin lui-même;
– qu'il y avait une certaine indépendance des signes du dessin (2) par rapport à ceux du modèle à l'écran;
– que le dessin (2) était aussi une sorte de modèle du cabri-dessin, ou que ces deux représentations sémiotiques renvoyaient à un idéal commun;
– que l'élève était capable de contrôler la validité de son inférence par un raisonnement graphique sur le dessin (2), même si le logiciel pouvait prendre en charge une partie de ce contrôle.

Si l'idée de la proposition **C** provient de la deuxième phase, les propositions graphiques du dessin (2), jointes à l'égalité **E**, constitueraient un moyen de communiquer un raisonnement graphique issu en partie d'une expérimentation sur un dessin dynamique. La production de la conséquence ne résulterait pas seulement d'une activité cognitive qui procède par conversion entre registres (du figural au discursif), mais aussi d'une traduction avec changements de modèles. De façon analogue à l'élève qui «relit» son raisonnement, le lecteur doit investir un raisonnement graphique pour comprendre la justification de l'inférence. Dans le cas du traitement des cas limites justifiés par le dessin (1) (troisième et quatrième inférences, schéma 7), le lecteur doit développer, par expansion graphique, des images mentales cohérentes pour dégager les propositions graphiques appropriées à l'acceptation des conséquences. Dans le cas du dessin (2), il s'agit d'engager un traitement par appréhension opératoire des sous-figures qui sont pertinentes dans l'acceptation de la proposition **C**.

Dans une analyse antérieure, nous avons envisagé le deuxième pas de raisonnement dans une structure de type «dessin (2) $\rightarrow$ proposition **C**». Toutefois, la proposition «on trouve que, deux types différents de triangles se forment (A et B)» constitue en quelque sorte une entrée discursive de la figure – description mathématiquement incomplète, mais soutenue également par les propositions graphiques du dessin (1). Puisque cela aurait supposé en outre que le dessin (2) est avant tout son propre modèle, nous avons abandonné cette perspective (deuxième inférence, schéma 7). Par contre, si l'élève avait entrepris sa preuve sur la base du dessin (2), cela aurait déterminé une inférence figurale de structure binaire (voir section *Fonction, structure et qualité*).

Qu'il y ait trois modèles ou deux objets relatifs à ces modèles, l'élève a manifestement besoin de représenter le mouvement sur papier. L'exercice est difficile: il veut expliquer ce qui se passe au niveau des aires «lorsque x tend vers 0» et «lorsque x tend vers base». On aurait pu s'attendre à ce qu'il traite deux nouveaux cas de figures par rapport à la «situation antérieure» (dessin (3)), mais il ne représente que le second cas. Le dessin (5) n'est qu'une réplique agrandie du dessin (4); il se destinerait à favoriser la comparaison visuelle de sous-figures. Si l'élève tente de retenir des «moments significatifs» pour le lecteur, il ne semble pas parvenir à les représenter de façon convaincante. Pourtant, en rapprochant ces dessins, en particulier avec les zones ombrées du dessin (4) et les propriétés spatiales qui se dégagent du dessin (5), on devine qu'elle était son intention. Dans la reproduction suivante:



on constate visuellement que $R_1 > R_2$ et $S_1 > S_2$. Nonobstant la partie rectangulaire commune (intersection du rectangle de la conjecture et du rectangle en pointillé), la perte d'aire $R_1 + S_1$ est strictement supérieure au gain d'aire $R_2 + S_2$. Pour comprendre et accepter que l'«on observe que l'aire du rectangle diminue tandis que l'aire du reste du triangle augmente», le lecteur doit produire un raisonnement graphique qui engage conjointement un traitement par appréhension opératoire des sous-figures pertinentes et un traitement par expansion graphique lors du déplacement cohérent du rectangle en pointillé. Ces traitements exigent au lecteur le développement d'images mentales dynamiques, voire cinétiques (au sens de Presmeg, 1986) s'il imagine l'intervention de l'activité musculaire transmise par la souris. La bande dessinée (3-4-5) intervient donc structurellement en énoncé-tiers d'un pas de raisonnement (cinquième inférence, schéma 7), même si ce dernier n'emporterait pas facilement la conviction.

En cette fin de preuve, l'élève est aux prises avec un obstacle communicationnel. Le registre figural semble lui refuser la représentation d'une justification concluante. Il ajoute, entre parenthèses, une phrase qui spécifie que «pour $x = \frac{\text{Base}}{2}$, ces deux aires étaient égales» (sixième inférence, schéma 7). Étant donné l'imprécision associée à l'interprétation de la bande dessinée (3-4-5), il pose alors la représentation graphique d'une fonction quadratique (dessin (6)). Tel un coup de théâtre, ce changement de registre est aussi sémiotiquement brusque que cognitivement imprévu. Aurait-il providentiellement collé une courbe avec laquelle il est familier et qui, surtout, lui permet de justifier sa conjecture avec un argument massue? Car non seulement l'élève vient de soulager le lecteur des faiblesses de la cinquième inférence, mais il représente l'à-propos de sa conjecture en situant «$\frac{\text{Base}}{2}$» (le maximum) au sommet d'une courbe symétrique (la parabole). Même si nous avons su a posteriori que l'élève est capable d'invoquer la propriété de Thalès dans cette situation, nous devons rappeler qu'il n'a jamais explicité de traitement analytique. Par contre, il s'agit bien d'une fonction. Le dessin (6) suggère que l'élève a saisi, ne serait-ce que de façon purement intuitive, la relation qui existe entre la variation de la «base» et l'«aire du rectangle» dans le domaine contextuel du problème. Puisqu'il a déjà traité les cas limites avec le dessin (1), il souligne «0» et «base» dans le texte après les avoir marqués sous la courbe. Le lecteur n'ayant pas accès à cette information, il ne sait pas que le dessin (6) vient aussi renforcer la justification de la cinquième inférence. En outre, parce que l'élève avait déjà écrit «on observe», on peut croire qu'il voulait rassurer le lecteur en lui montrant que ses considérations ne procèdent pas uniquement par le sens de la vue lorsque le dessin est son propre modèle. Malgré sa tournure impersonnelle, la signification du groupe sujet-verbe s'attache aussi bien à une constatation visuelle (propriétés spatiales) qu'à une construction cognitive (propriétés qui renvoient à un modèle). Comme l'élève est sans doute conscient qu'il n'a pas su communiquer un raisonnement graphique avec des signes conventionnels, il avait absolument besoin d'introduire un troisième système de représentation. Afin de modifier la valeur épistémique de la conjecture, le lecteur doit coordonner un traitement sémiotique et cognitif dans trois registres; pour accepter la conséquence des inférences du texte, il est obligé d'investir des raisonnements graphiques qui peuvent différer de la réalisation de l'auteur. Même si cela comporte des risques dans la communication auteur $\rightarrow$ lecteur, les exemples 1 et 2 invitent à considérer sérieusement les bénéfices structuraux et fonctionnels qu'offrent les registres graphiques dans la constitution d'authentiques pas de raisonnement.

3.2. *Fonction, structure et qualité*

L'inférence figurale repose fondamentalement sur la notion de raisonnement graphique et sur la coordination d'un traitement entre registres pour produire une conséquence discursive. Nous reconnaissons deux types d'organisation d'une ou de plusieurs propositions:

– Inférence figurale de structure binaire, sans énoncé-tiers:

$$\text{Proposition(s) graphique(s)} \Rightarrow \text{Proposition(s) discursive(s)}$$

– Inférence figurale de structure ternaire, avec énoncé-tiers:

$$\begin{array}{c}\text{Proposition(s) graphique(s)}\\ \text{Proposition(s) discursive(s)} \Rightarrow \text{Proposition(s) discursive(s)}\end{array}$$

En lisant ces schémas, on pourrait croire que le processus inférentiel s'articule par une organisation séquentielle de propositions graphiques et discursives. En fait, lorsque nous écrivons «proposition(s) graphique(s)», nous présumons qu'elles véhiculent un raisonnement graphique, comme nous l'avons montré dans l'analyse des solutions précédentes. L'inférence figurale est donc le pas de raisonnement discursivo-graphique qui modifie la valeur épistémique, sémantique ou théorique de la conséquence discursive. Du point de vue proprement discursif, on sait que les propositions interviennent dans un raisonnement en fonction de leur valeur épistémique soit indirectement par leur statut théorique, soit directement par leur contenu (Duval, 1995, p. 233). En ajoutant l'inférence figurale au discours, puisque ce sont des propositions graphiques qui engagent (structure binaire) ou qui soutiennent l'inférence (structure ternaire), il faut considérer les particularités de la coordination du traitement entre registres. Nous avons vu que les passages:

$$\text{Proposition(s) graphique(s)} \rightarrow \text{Proposition(s) discursive(s)}$$
$$\text{Proposition(s) discursive(s)} \rightarrow \text{Proposition(s) graphique(s)}$$

procèdent par activité cognitive de conversion ou de traduction, selon les modèles mis en œuvre et les objets qu'ils sont censés représenter. Si la structure binaire ne peut apparaître qu'au début d'un raisonnement, voire d'un argument, la structure ternaire suppose que toute compatibilité sémantique entre les propositions discursives, ou que tout accommodement à la continuité thématique développée dans le reste du raisonnement ne s'avèrent suffisants pour accepter l'inférence. Dans ce dernier cas, il doit être impossible de reconnaître une structure inférentielle ou de saisir localement le pas de raisonnement en masquant le dessin. Dans le cas contraire, cela supposerait que les propositions graphiques jouent également une sorte de rôle illustratif:

Le succès de l'exploration de la figure dans le cadre d'un problème posé, va alors dépendre de l'articulation entre cette appréhension opératoire de la figure et un jeu discursif d'inférences lequel mobilise un réseau de définitions et de théorèmes. Des phénomènes de non-congruence peuvent alors surgir entre ce que montre chacune des sous-figures d'une séquence et les objets auxquels réfèrent les définitions et les théorèmes à utiliser pour parvenir à la solution mathématique du problème. (Duval, 1995, p. 191).

Même si l'inférence figurale n'exclut pas l'éventualité d'articulation d'un jeu discursif congru au raisonnement graphique, son profit n'est pas subordonné à une telle éventualité, mais au progrès cognitif que l'inférence figurale engendre – comme les égalités qui découlent des dessins (2) ou (6) à l'exemple 2. Pour qu'il puisse s'opérer, le progrès cognitif dépend certes de l'expressivité du registre figural (ou des représentations graphiques en analyse fonctionnelle), mais aussi de l'aptitude du lecteur pour l'interprétation et pour la sélection des propositions graphiques pertinentes dans l'acceptation de la conséquence discursive. Parce que leur sens n'est pas toujours spécifique et qu'il peut renvoyer à plusieurs modèles (sorte de «polysémie graphique»), le lecteur doit déjà posséder une compétence relativement à l'activité cognitive de traduction. En outre, contrairement au jeu discursif d'inférences, le registre figural (ou celui des représentations graphiques de fonction) n'expose pas l'ordre d'appréhension des propositions graphiques qui véhiculent le raisonnement graphique. Au lecteur incombe la responsabilité de trouver cet ordre. Par conséquent, la qualité d'une inférence figurale se tourne vers:

– le degré de fiabilité que possède ce qui est représenté par les propositions graphiques;
– l'effectivité de la représentation dans ses rapports à la qualité interprétative des propositions graphiques et à la qualité du raisonnement graphique qui s'y fonde;
– le degré de fidélité de l'expansion graphique ou de l'appréhension opératoire par rapport aux différents modèles qui entretiennent la valeur épistémique dans le raisonnement graphique;
– le degré de convenance de la proposition discursive inférée dans son rapprochement aux propositions graphiques appropriées et, dans le cas d'une inférence figurale de structure ternaire, celui du passage des propositions discursives aux propositions graphiques.

On peut être étonné de voir apparaître la notion de «valeur théorique» avec l'inférence figurale. Car notre définition suppose qu'en adjoignant un registre graphique au discours, il est également possible de modifier la valeur théorique d'un énoncé-cible. On sait que dans la recherche contemporaine certains contextes mathématiques sollicitent davantage l'introduction des registres graphiques à la structure discursive de raisonnements. En théorie des nœuds par exemple, Sullivan (2000) montre des pas de raisonnement dont la justification repose sur la représentation de figures ou de graphes. Malgré le style «lemme-théorème-démonstration-corollaire» du texte et le niveau épistémique élevé de la revue, plusieurs des représentations graphiques proposées interviennent dans la démonstration de lemmes. Même que l'auteur démontre complètement un lemme à l'aide d'une bande dessinée (p. 311). Bien qu'il précise, dans quelques cas, que l'idée de la preuve est valable «sans perte de généralité» (en anglais «without loss of generality»),[7] la valeur théorique de propositions discursives se modifie dans le corpus théorique de l'article. Faut-il rappeler que la démonstration en mathématique n'intervient pas seulement lors de démarches de systématisation du savoir? On peut alors se demander si un raisonnement discursivo-graphique peut entretenir la valeur de vérité. Dans Richard (2004, pp. 250–252), on développe la résolution d'une inéquation algébrique qui se sert des signes conventionnels de la représentation graphique ou tabulaire de fonctions. Le lecteur entraîné au fonctionnement de ces registres et à l'interprétation de leurs signes peut reproduire un traitement sémiotique et cognitif dans un esprit d'expansion formelle (au sens de Duval, p. 129). Parce que l'activité cognitive dans le passage inéquation → graphique → inéquation procède par conversion entre registres, les inférences maintiennent formellement la valeur de vérité. Il s'agit de raisonnements discursivo-graphiques de haute qualité.

3.3. *Conséquences didactiques: compréhension de textes et rédaction de solutions*

Au risque de formuler une évidence, la modification de la valeur épistémique d'énoncés discursifs est le lot du quotidien en classe de mathématique. De nombreuses situations requièrent l'adhésion d'un élève sans qu'il soit nécessaire de produire un raisonnement exclusivement discursif, là où même l'expression gestuelle contribue au processus d'adhésion. Qu'il s'agisse d'un débat ou d'un dialogue, c'est souvent grâce à la représentation d'un dessin au tableau, sur une feuille ou à l'écran d'une calculatrice graphique que l'on réussit à convaincre l'élève en expliquant l'articulation d'un raisonnement graphique. Loin de vouloir substituer un éventuel jeu discursif d'inférences, ces initiatives demeurent salutaires lorsqu'il faut souligner le dégagement d'une procédure réutilisable dans un autre contexte ou, tout simplement, pour saisir les idées clefs d'un processus de résolution. La diversité des moments dans lesquels l'inférence figurale peut aider à structurer un progrès cognitif et l'importance que nous avons accordée à la fonction de communication dans notre analyse invitent

[7] Le raisonnement s'effectue à partir d'un cas particulier type, laissant au lecteur le soin de la généralisation.

à centrer notre commentaire à la compréhension de textes et à la rédaction de solutions. Néanmoins, nous jugeons opportun de soulever au passage deux questions connexes. Une première porte sur les habitudes discursives en classe de mathématique et une seconde concerne la représentation interactive.

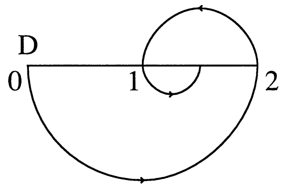
En corrélation forte avec l'évolution des moyens technologiques et de leur accessibilité, les manuels scolaires et un grand nombre de publications didactiques récentes offrent un texte d'organisation complexe, abondamment illustré. À part les représentations de scènes ou de personnages qui alimentent la communication avec le lecteur, les manuels scolaires montrent de nombreuses images qui semblent affectées à éclaircir le sens d'un mot, d'une notation ou d'un passage délicat. Même si le lecteur les reçoit comme des annotations marginales, il est parfois difficile de distinguer entre une représentation simplifiée du contenu, un éclaircissement d'un point sensible et une partie intégrante d'une solution proposée. Qui plus est, lorsque l'image est une représentation graphique, on ne saisit pas toujours comment elle s'ajuste au texte. N'y aurait-il pas avantage, dans ce dernier cas, à structurer expressément l'expansion discursive du texte avec des inférences figurales? Que l'on songe à des activités pour s'initier, des exercices d'exploration, des notes de cours, des monographies thématiques ou des tâches d'évaluation, il est aisé de projeter l'éventualité du bénéfice cognitif que procurent les inférences figurales dans la préparation de matériel scolaire.

Peu importe le type d'activité mis en œuvre, la gestion des registres graphiques qui se montrent rentables pour la marche didactique comporte des difficultés spécifiques. Comparativement au discours, les représentations graphiques cachent le raisonnement que ses propositions sont censées articuler. Les inférences figurales des exemples 1 et 2 sont peut-être susceptibles de modifier la valeur épistémique des propositions conséquentes, mais contrairement à la production d'un développement discursif substitutif, les «dessins» n'indiquent pas au lecteur comment s'organisent les propositions graphiques pour justifier l'inférence. Notre analyse des textes 4 et 6 montre combien l'intention de l'élève est parfois délicate à interpréter, surtout si on ne peut pas le questionner sur celle-ci. On comprend qu'un phénomène similaire se transpose pour l'enseignant qui doit évaluer des solutions de même nature. De plus, les signes graphiques n'ont généralement pas de signification et se constituent par une référence instituée. Puisqu'il doit investir un raisonnement graphique, l'élève qui n'est pas très familier avec le système de représentation mobilisé risque de ne pas pouvoir accepter l'inférence ou d'être contraint à considérer le «dessin» comme son propre modèle. Si les habitudes discursives dominantes au sein d'une école sont défavorables à l'intégration de «dessins» dans l'expression écrite du raisonnement mathématique, cela érige l'enseignant «dissident» en censeur des raisonnements valables dans sa classe. Y aurait-il un risque d'affaiblir le développement de l'autonomie de l'élève et de ses moyens de contrôle discursivo-graphique en l'absence de l'enseignant?

On sait, par contre, que la linéarité sémiotique inhérente à tout discours est susceptible de diluer les passages clefs de raisonnements, comme ceux qui se fondent sur certains calculs analytiques «trop longs», ou lors de certaines démonstrations excessivement rigoureuses au regard des exigences d'une situation donnée. Avec l'inférence figurale, il s'agit bien plus de développer une attitude chez le professorat que de céder à la systématisation enthousiaste de son utilité dans la rédaction de solutions. Tout usage abusif de l'inférence figurale pourrait occasionner de véritables obstacles didactiques, comme celui qui sous-estimerait l'implication du discours dans la construction des connaissances par l'élève. À plus forte raison, une telle mise en garde demeure valable pour l'application outrancière de codes ou de signes peu connus à l'extérieur du contrat didactique, ou dont la prérogative réside dans la singularité d'une situation concrète. Malgré cela, il faut souligner que l'inverse est tout aussi vrai. La pudeur qu'éprouvent certains élèves à intégrer des dessins dans leurs raisonnements, parce qu'on leur a répété «qu'il faut s'en méfier», pourrait également constituer un obstacle en négligeant l'importance de la coordination de registres dans la fonction sémiotique.

L'entrée des calculatrices graphiques et des logiciels de géométrie dynamique en classe a sans doute rendu plus apparente l'importance du raisonnement graphique. Pourtant, même s'il est captivant pour l'élève de découvrir expérimentalement les propriétés qui demeurent invariantes en modifiant les paramètres d'une courbe ou en agissant directement sur un dessin, c'est en connaissant préalablement la logique de la construction du signe (la production sémiotique) qu'il peut consolider les rapports qu'il entretient avec ce que le signe est censé représenter. Pour produire des inférences figurales de qualité dans l'expression écrite de ses raisonnements, l'élève doit pouvoir contrôler le raisonnement que masque l'instantanéité des rétroactions de la «machine». Parce que l'élève peut comprendre ce qu'il voit avec les yeux, sans savoir pourquoi il en est ainsi. C'est-à-dire qu'on a beau seconder le passage d'une proposition à une autre en développant des courbes ou en animant un dessin. Mais si on ne donne pas à l'élève la responsabilité du contrôle dans le renvoi à l'idéal et dans la progression du raisonnement, le profit de la démarche pourrait se limiter à une reproduction de «moments significatifs» retenus. Bien que la participation de l'élève dans la construction du signe reste un gage de qualité, elle suppose, mais elle suscite aussi, l'acquisition d'une

Un demi-cercle de rayon 1 est décrit à partir d'un point D. Il est ensuite prolongé par un demi-cercle de rayon 1/2, et ainsi de suite, de façon à ce que chaque demi-cercle ait un rayon moitié du précédent.



Quelle est la distance du point de départ D au point d'arrivée? Quelle est longueur totale du chemin?

Situation 8. Problème d'une étrange spirale (Jaquet, 2001).

compétence certaine dans la communication de solutions mathématiques convaincantes. À l'image des textes 4 et 6, l'inférence figurale devient utile pour structurer des solutions qui mettent en évidence les idées clefs du raisonnement tout en facilitant une vue d'ensemble sur l'organisation rédactionnelle. Dans l'esprit d'une démarche spéculative, nous illustrons ces aspects à partir du problème de l'«étrange spirale» (situation 8), dont la résolution fait intervenir la notion de convergence d'une série géométrique. Nous proposons une solution écrite à la demande de la longueur totale du chemin (illustration 9).

Pour l'élève de 15-16 ans, la première intuition peut être trompeuse, car la visualisation par le dessin de la spirale semble engendrer un chemin qui tourne indéfiniment autour d'un éventuel point d'arrivée. La difficulté cognitive du problème réside essentiellement dans la détermination du type de progression de la spirale et de son passage à l'infini. Dans la solution proposée, après avoir posé la longueur L_n du énième chemin, on factorise π. Pour justifier le passage subséquent, il aurait été possible d'invoquer directement une propriété caractéristique des suites géométriques. Mais si l'intention didactique vise aussi à faire comprendre le mécanisme de sa démonstration, on peut construire la simplification de la sommation:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

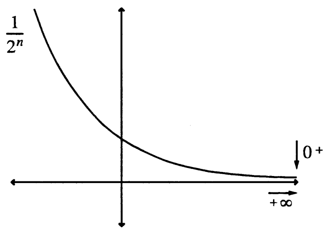
en plaçant, dans des colonnes imaginaires, les termes correspondant aux sommations $\frac{1}{2}s_n$ et s_n. Les opérations sous la barre résultent d'une soustraction membre à membre et de manipulations algébriques qui vise à exprimer, sous une écriture canonique, la sommation initiale en fonction de n. Cette procédure est habituelle dans l'enseignement des séries géométriques, mais le réarrangement visuel de termes correspondants

$$L_n = \pi + \pi\frac{1}{2} + \pi\frac{1}{4} + \cdots + \pi\frac{1}{2^n}$$
$$= \pi\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}s_n & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ - \quad s_n & = & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ \hline \left(\frac{1}{2}-1\right)s_n & = & \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \Rightarrow s_n = 2 - \frac{1}{2^n} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$L_n = \pi\left[2 - \frac{1}{2^n}\right]$$



$$\Downarrow$$

$$L_\infty = 2\pi \quad \therefore$$

Illustration 9. Deux inférences figurales dans la résolution du problème d'une étrange spirale.

relève l'idée charnière qui autorise la simplification d'un nombre quelconque de termes, exprimés par de «gênants» points de suspensions. En montrant à l'élève cette procédure pour la première fois, on institue en quelque sorte le fonctionnement d'un calcul analytique qui profite du réarrangement visuel de termes discursifs. Globalement, cette production sémiotique peut se considérer comme un énoncé-tiers qui procède par expansion formelle, tel le développement d'un lemme pour justifier une déduction. Comme le registre mobilisé est le même que celui de la prémisse et de la conséquence, il n'y a pas d'activité cognitive de conversion ou de traduction, mais seulement la reprise d'énoncés pertinents; le raisonnement graphique est en fait un calcul. Il s'agit d'un cas extrême d'une inférence figurale.[8]

La deuxième inférence figurale se fonde sur la représentation graphique d'une fonction. C'est-à-dire que le «dessin» est une esquisse d'une fonction exponentielle dont la base est strictement comprise entre 0 et 1, et non pas

[8] Dans un contexte de raisonnement récursif et de réduction de séries, certaines «preuves sans mots» se constituent ainsi par réarrangement visuel de nombres ou d'expressions algébriques (v.g. Nelsen, 1993, p. 96).

la représentation graphique particulière de la fonction. L'introduction des petites flèches horizontale et verticale sert à simuler un mouvement en indiquant, par raisonnement graphique, l'invariance de la tendance des images (avec «0^+») selon la croissance infinie de l'antécédent n (avec «$+\infty$»). L'usage de cette production sémiotique suppose aussi une première institution en classe de la signification de ce type de signes graphiques, ainsi que la connaissance de propriétés élémentaires sur les fonctions exponentielles. Néanmoins, lorsque qu'un tel travail est assuré, l'inférence figurale force la coordination entre registres dans la réalisation d'un pas de raisonnement structuré qui n'a pas besoin, en outre, de mobiliser toute l'artillerie de la notation associée au processus de limite sous-jacent ou à la définition des nombres réels.[9] Par contre, si la notion de limite avait déjà été introduite en classe, l'acceptation de l'inférence aurait pu avoir lieu en masquant la représentation graphique. L'idée de masquer le dessin, que nous avons soulevée à quelques reprises, dépend donc intimement des exigences de la situation. Autrement dit, lorsque la fonction de l'inférence figurale est de modifier la valeur épistémique de la conséquence discursive, le progrès cognitif par le pas de raisonnement dépend du contexte de réalisation, de l'univers des connaissances, des représentations et des relations sociales entre les interlocuteurs ou par rapport au lecteur imaginaire à qui se destine la production sémiotique de l'«énoncé-tiers graphique».

4. CONCLUSION

Les solutions d'élèves que nous avons montrées dans cet article ne peuvent se concevoir comme le paradigme de preuves graphiques dont un enseignement suffisamment bien rodé permettrait d'en augmenter la fréquence de production. L'auteur du texte 6 est manifestement un élève doué. Toutefois, nous n'envisagions pas l'apparition de l'inférence figurale comme un phénomène relié, par exemple, à d'éventuels rythmes d'apprentissages. Il s'agit certainement d'une question pertinente à étudier du point de vue psychologique, notamment pour savoir si l'emploi des registres graphiques ne masquerait pas, pour certains, des troubles langagiers. En fait, notre propos s'est concentré sur la détermination de conditions sémiotiques et cognitives favorables à l'apprentissage des mathématiques et, en particulier, de la géométrie. Parce qu'à un extrême, on peut situer un enseignement des mathématiques qui n'accepte pratiquement que l'expansion formelle comme forme d'expansion discursive. Mais à l'autre extrême, on peut songer à un enseignement visuel qui semble estimer que le

[9] Cela peut être utile dans l'esprit d'un cours «précalcul» au secondaire.

talent créateur des «élèves-artistes» se vaut pour peu qu'ils célèbrent chacun à sa manière le culte des images. Pour l'enseignant, respecter l'élève ne signifie pas le laisser seul dans la construction présumée de notions mathématiques, mais plutôt être capable de reconnaître la légitimité mathématique dans ce que l'élève sait faire et, simultanément, pouvoir la lui enseigner. Afin de convenir d'une telle légitimité dans un contexte de raisonnement graphique, nous avons d'abord constaté l'actualité des «preuves sans mots», qui ne cessent d'explorer les diverses façons dont les registres graphiques «font voir» une propriété. Ensuite, nous avons indirectement posé les assises épistémologiques de la constitution multiregistre disponible en mathématique en citant plusieurs usages dans les textes destinés à l'enseignement et, dans un cas, à la recherche.

L'apprentissage du raisonnement est un exercice complexe qui ne peut s'accomplir uniquement à partir de la planification de séquences d'enseignement ou du développement de compétences. Car il saisit l'élève dans tout son être, de ses relations sociales à la représentation de ses connaissances et à leur contrôle. Au point qu'un apprentissage du raisonnement mal stimulé en classe de mathématique risquerait d'alimenter la frustration de ne pas comprendre ou de convertir les obstacles en authentiques échecs personnels. Les textes d'élèves que nous avons analysés montre bien leur talent créateur en situation de validation. Lorsque qu'ils introduisent des dessins à l'organisation discursive de leur solution, c'est sans doute parce qu'ils cherchent à équilibrer ce qu'ils connaissent avec ce qu'ils peuvent et avec ce qu'ils croient qui devrait être. Si on négligeait, en classe, l'importance de la coordination du traitement entre registres ou qu'on ne montrait pas comment les registres graphiques savent compléter les registres discursifs, on limiterait forcément l'horizon sur «ce qui devrait être». La représentation graphique est à la fois une démarche, son résultat et les deux en même temps. Si elle «fait voir» à partir de signes matériels, elle le fait aussi avec les «yeux de la pensée». C'est-à-dire qu'avec les notions de propositions graphiques, d'expansion graphique et d'appréhension opératoire, nous avons montré qu'on pouvait lire, raisonner ou communiquer avec les registres graphiques comme on pouvait lire, raisonner ou communiquer avec les registres discursifs. Lorsqu'on admet que l'écrit est aussi une «mémoire de travail» qui permet à l'élève de reformuler des problèmes ou d'en poser de nouveaux, l'inférence figurale offre une réponse pragmatique à la rédaction de solutions. Même si elle cache une partie du raisonnement, l'inférence figurale est susceptible d'adoucir l'incontournable linéarité sémiotique du discours. Avec ses caractéristiques structurales et fonctionnelles, l'inférence figurale ouvre le domaine du progrès cognitif qui bénéficie de l'apport du raisonnement graphique pour emporter la conviction.

REFERENCES

Alsina, C.: 2004, 'Proof without words: Cauchy-Schwarz inequality', *Mathematics Magazine* 77(1), 30.

Bachmakov, M.: 1998, *Les mathématiques du COK*, ACL—Les Éditions du Kangourou, Paris.

Bishop, A.J.: 1996, 'Implicacions didàctiques de les recerques sobre visualització', *Butlletí de la Societat Catalana de Matemètiques* 11(2), 7–18.

Bonnefond, G., Daviaud, D. et Revranche, B.: 1999, *Le nouveau Pythagore*, Hatier, Paris.

Bradley, G.L. et Smith, K.J.: 1995, *Calculus*, Prentice Hall, Upper Saddle River.

Brannan, D.A., Esplen, M.F. et Gray, J.J.: 1999, *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Berne.

Fischbein, E.: 1993, 'The theory of figural concepts', *Educational Studies in Mathematics* 24(2), 139–162.

Fomin, D., Genkin, S. et Itenberg, I.: 1996, *Mathematical Circles. Russian Experience*, collection Mathematical World, American Mathematical Society, Providence.

Gramirian, C., Vallaud, F. et Misset, L.: 1998, *Maths Terminale ES*, Hachette Éducation, Paris.

Graner, F.: 1998, *Petits problèmes de physique*, Springer-Verlag, Berlin.

Graner, F.: 2003, *Physique de la vie quotidienne*, Springer-Verlag, Berlin.

Gray, E. et Tall, D.: 1994, 'Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic', *The Journal for Research in Mathematics Education* 26(2), 115–141.

Jackson, A.: 2002, 'The world of blind mathematicians', *Notices of the American Mathematical Society* 49(10), 1246–1251.

Jaquet, F. (2001), 'Une étrange spirale', *Niveaux de référence en mathématiques à 16 ans en Europe. Propositions de questions de référence*. Rapport du comité sur l'enseignement des mathématiques, Société Mathématique Européenne.

Laborde, C.: 1994, 'Enseigner la géométrie: permanences et révolutions', *Actes du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, Les Presses de l'Université Laval, Québec, 47–75.

Laborde, C. et Capponi, B.: 1994, 'Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14(1, 2), 165–210.

Mesquita, A.M.: 1989, *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves de géométrie: éléments pour une typologie*, thèse doctorale, Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Nelsen, R.B.: 1993, *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Washington D.C.

Nelsen, R.B.: 2000, *Proofs Without Words II. More Exercices in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Washington D.C.

Presmeg, N.C.: 1986, 'Visualization in high-school mathematics', *For the Learning of Mathematics* 6, 42–46.

Richard, P.R.: 2003, 'Proof without words: equal areas in a partition of a parallelogram', *Mathematics Magazine* 76(5), 348.

Richard, P.R.: 2004, *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*, Peter Lang, Berne.

Richard, P.R. et Sierpinska, A.: 2004, 'Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie'. Revue des sciences de l'éducation, Montréal. In G. Lemoyne & C. Sackur (réd. invitées), Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. *Revue des sciences de l'éducation, Numéro thématique* 30(1) (à paraître).

Sullivan, M.C.: 2000, 'Knot factoring', *The American Mathematical Monthly* 107(4), 297–315.

Vergnaud, G.: 1990, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2, 3), 133–170.

PHILIPPE R. RICHARD
Département de didactiqùe
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) Canada H3C 3J7
Phone: 514-343-2064
Fax: 514-343-7286
E-mail: philippe.r.richard@umontreal.ca