TEXTOS CLÁSICOS Y GEOMETRÍA DINÁMICA: ESTUDIO DE UN APORTE MUTUO PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Richard, Philippe R.[1]**, Meavilla Seguí, Vicente**[2] **y Fortuny Aymemí, Josep Maria**[3]
[1] Département de didactique, Université de Montréal, Canadá
[2] Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España
[3] Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona
philippe.r.richard@umontreal.ca
vmeavill@hotmail.com
JosepMaria.Fortuny@uab.cat

Resumen. La reedición de textos matemáticos clásicos, o su reciente digitalización para un gran público, abre al mundo de la educación un universo antes reservado a los historiadores u otros especialistas en epistemología. Con todo, muchos textos del siglo XVIII ya se presentaban como obras en las cuales los autores pretendían explicar los conceptos matemáticos expuestos, sin perder necesariamente de vista el sentido y la coherencia de la estructura matemática o los aspectos formales de demostraciones convincentes. Los *Éléments de géométrie* de Alexis Claude Clairaut, publicados por primera vez en 1741, pertenecen a esta clase de obras manifiestamente pedagógicas. A partir de una experiencia con alumnos de bachillerato, mostramos cómo se pueden desarrollar sus competencias matemáticas a través de una interpretación del texto de Clairaut y el uso conjunto de un software de geometría dinámica.

Palabras clave. Didáctica de las matemáticas, textos antiguos, geometría dinámica.

Classical Texts and Dynamic Geometry: A Mutual Contribution to the Geometry Learning

Summary. The new edition of classical mathematical texts, or its recent digitization for the general public, represents an approach to the universe that has been traditionally reserved to historians and other experts on epistemology. Many texts from the 18th century were already presented like works aimed at the explanation of certain mathematical concepts, and the interpretation of the coherence of the mathematical structure and the formal aspects of convincing proofs. The *Éléments de géométrie* by Alexis Claude Clairaut, that were first published in 1741, is an example of this type of pedagogical texts. Based on an experience with high school students, we examine the development of their mathematical competences through the analysis of one of Clairaut's texts, along with the use of dynamic geometry software.

Keywords. Didactics of mathematics, classical texts, dynamic geometry

1. INTRODUCCIÓN

La historia de las matemáticas y de su enseñanza puede servir como inspiración para el diseño de actividades didácticas que amplían sus efectos pedagógicos con un buen uso de las nuevas tecnologías. En este artículo proponemos un material curricular, cuyo contenido se inspira en los *Éléments de géométrie*[1] de Alexis Claude Clairaut, y que se desarrolla a través de actividades con Cabri II Plus que diseñamos para nuestra investigación. El marco teórico se fundamenta, por una parte, en el enfoque funcional-estructural para el estudio de textos antiguos de Richard y Sierpinska (2004) y, por otro lado, en el enfoque cognitivo de los instrumentos contemporáneos de Rabardel (1995). Este marco se aplica al análisis de la producción de alumnos que interpretan el contenido de un extracto, en español, de los *Éléments*, con la ayuda de actividades instrumentadas que les dirigen hacia el entendimiento de puntos clave.

2. MARCO CONCEPTUAL

En la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1998), el alumno desarrolla sus competencias matemáticas cuando interactúa con un medio. En nuestro estudio, el medio está formado por un cuestionario que integra un extracto de los *Éléments*, presentado en el *apartado 3*, y un software de geometría que proporciona dinamismo a las actividades, el Cabri II Plus.

Mientras la idea de interacción es evidente con un software, no parece tan inmediata con un texto. Recurrimos a la hipótesis de Eco (1979) cuando considera que cualquier texto que se destina a ser leído, además de contar con algunas reacciones a lo escrito, construye a su lector modelo. En un texto de vulgarización por ejemplo, el lector modelo puede ser un auditor pasivo que posee suficientemente experiencia de vida o cultura general para entender alusiones y sobrentendidos. Un libro como los *Éléments*, que se presenta claramente como un texto pedagógico (ver *apartado 3*), es mucho más exigente para su lector modelo. Éste tiene que ser una especie de interlocutor activo, coescribiendo el texto con el autor, completando el discurso tácito, respondiendo a sus preguntas, planteando a su vez nuevas preguntas para saber más y poder seguir leyendo y colaborando. Además, tiene que entender los razonamientos que vinculan los dibujos geométricos y coordinarlos con el discurso que ofrece el texto (Alsina y Nelsen, 2006). Siendo así, consideramos que se establece una relación de comunicación entre el lector y el texto, como si este último fuera un interlocutor.

Richard y Sierpinska (2004) muestran cómo los textos antiguos utilizan sus elementos semióticos estructurados, como el discurso y las figuras, para realizar las diferentes funciones del lenguaje (no discursivas, metadiscursivas y discursivas). Sin entrar en los aspectos más técnicos del enfoque, podemos subrayar que un texto no influye solamente con su contenido, sino también con:

– La expresión del sentimiento del autor acerca de lo que dice (estatuto de verdad, de conjetura, de orden o mandamiento, de alegato, de queja, etc.).

– La manera más o menos estética o clara con la cual lo dice (frases cortas o largas, enlaces más o menos melódicos entre palabras, ritmo de las frases; figuras armoniosas, bien asentadas sobre el eje horizontal, etc.).

– La expresión explícita o implícita de aquello que el locutor espera de su interlocutor (provocar una actitud, una acción, fomentar un sentimiento acerca de algo, etc.).

– La expresión de la voluntad del locutor de permanecer en contacto con su interlocutor.

Sin embargo, en nuestro estudio, el contenido matemático reviste especial importancia, puesto que es él quien alimenta el discurso principal de los *Éléments*. Es decir, que cualquier comprensión del texto, sobre todo en un contexto de aprendizaje, necesita marcar el cómo se articulan los conceptos y procedimientos matemáticos clave. De hecho, son éstos los que sostienen la formulación de los problemas. Por tanto, están en el origen de la formación conceptual, y fundamentan las actividades instrumentadas que unen los problemas al texto de Clairaut.

La noción de instrumento, para cualificar la actividades con el software de geometría dinámica, proviene del enfoque cognitivo de los instrumentos contemporáneos de Rabardel (1995, 2001). En el corazón de su teoría, Rabardel distingue el instrumento de la herramienta. La herramienta es un dispositivo técnico o artefacto, como lo es un software o un compás. El concepto de herramienta es próximo al concepto de entorno que abunda en la literatura sobre educación matemática, especialmente cuando se comparan los entornos informáticos de aprendizaje humano con el entorno lápiz-papel (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2008). El instrumento es el medio de acción o pensamiento construido por un sujeto cuando éste utiliza una herramienta. Entonces, el concepto de instrumento es próximo al concepto de medio en la teoría de las situaciones didácticas, en el sentido de que es la propiedad de una herramienta, emergente de la interacción con un sujeto que actúa. Por ejemplo, la herramienta «compás» en el entorno lápiz-papel conlleva, para un sujeto, el instrumento «transferencia de medidas» y «arco de circunferencia», mientras que puede implicar también, con un software de geometría dinámica, un instrumento de creación de circunferencias móviles de radio constante.

Por otra parte, la manera en que se forma el instrumento en el sujeto es la génesis instrumental. Se distinguen dos procesos: la instrumentación, como proceso de acomodación de los esquemas mentales del sujeto para la realización de una tarea, y la instrumentalización, como proceso de enriquecimiento de las propiedades del instrumento por parte del sujeto. Dicho de otro modo, mientras que los conocimientos del alumno gobiernan la manera con la que utiliza una herramienta y, en cierto sentido, la forma (instrumentalización), la capacidad sugestiva de acción y los condicionantes de la herramienta influyen en las estrategias de resolución de problemas del alumno y su correspondiente formación de concepciones emergentes (instrumentación). Según Rabardel, el instrumento no es neutro para la construcción de conocimientos, como ya no lo era cuando se ha mostrado, en filosofía con Kant, que nuestros conocimientos dependen de las herramientas cognitivas movilizadas para construirlas, o en psicología con Piaget, que la acción es también una fuente de conocimientos para el sujeto, a veces incluso una fuente principal. En una situación didáctica, Rabardel propone la noción de mediación instrumental para reflejar la relación mediada entre el docente y el alumno, cada uno de ellos en una relación mediada a los objetos de las actividades (saberes o competencias matemáticas). En fin, el instrumento también es mediador en relación con uno mismo (el alumno) y en sus relaciones con los demás (compañeros de clase).

3. ANÁLISIS A PRIORI DEL TEXTO DE CLAIRAUT

Puesto que el texto analizado a continuación es un extracto, consideramos antes de nada que es preciso situarlo brevemente con respecto a la intención de Clairaut.

Además, dado que cualquier texto se puede interpretar de diversas maneras (problema típico de la comunicación) y que necesitamos asentar una interpretación en función de nuestro estudio (componente típico de un enfoque didáctico), presentamos también un análisis a priori del extracto para un lector actual. El detalle de este análisis recae tanto en la motivación del cuestionario (*apartado 4*) como en el análisis de soluciones (*apartado 6*), sobre todo porque en el texto de Clairaut el lector modelo es un principiante. De hecho, después de haber mencionado, en el prefacio, que «comúnmente, los principiantes se cansan y se desaniman antes de tener una idea clara de lo que se les quiere enseñar», el autor declara:

> He propuesto remontarme a lo que pudo haber sido el nacimiento de la Geometría e intentar desarrollar sus principios por un método natural del que se pueda asumir que fue el mismo que el de sus primeros inventores. Sólo he procurado evitar aquellas falsas tentativas que ellos tuvieron la necesidad de hacer.
>
> (…) Para seguir en esta obra un camino semejante al de los inventores, primeramente pretendo hacer descubrir a los aprendices los principios de los que puede depender la simple medida de las tierras, de las distancias accesibles e inaccesibles, etc. Por otra parte, considero otras investigaciones, tan análogas a las primeras, que la curiosidad común a todos los hombres les lleva a detenerse en ellas. A continuación, justificando esta curiosidad con algunas aplicaciones útiles, vengo a examinar los aspectos más interesantes de la Geometría elemental.
>
> Creo que se puede estar de acuerdo en que este método sea, cuando menos, el más apropiado para animar a aquellos que podrían ser rechazados por la aridez de las verdades geométricas privadas de sus aplicaciones. Además, espero que tendrá una utilidad más importante: que acostumbrará al espíritu a buscar y a descubrir, porque evito conscientemente dar algunas proposiciones en forma de teoremas; es decir, proposiciones en las que se demuestra tal o cual verdad, sin mostrar cómo se ha llegado a su descubrimiento.

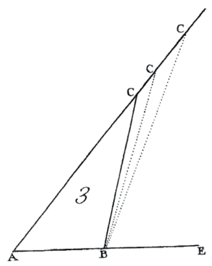
A fin de relacionar el extracto con las respuestas de los alumnos en un contexto instrumentado, la estructura que nos interesa es el razonamiento discursivo-gráfico del contenido matemático, insistiendo en la función de comunicación del lenguaje como fuente de interacción. Las referencias numéricas del análisis recogen los números de línea que están en el margen izquierdo (números arábigos) o en el título de los párrafos del extracto (números romanos).

Ilustración 1

Texto de Clairaut.

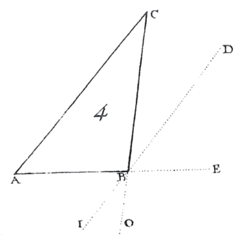
LXII

Tal como hemos dicho antes, dado que en la práctica interesa que los ángulos puedan medirse exactamente, no podemos contentarnos con tomarlos incluso con los instrumentos más perfectos. Además, es necesario encontrar un procedimiento para verificar sus medidas y hacer la corrección, si fuese necesario. Este procedimiento es simple y fácil. Retomemos el triángulo ABC. Sabemos que la magnitud del ángulo C depende de la de los ángulos A y B; porque aumentando o disminuyendo estos ángulos cambia la posición de las líneas CA y BC y, por consiguiente, también el ángulo C que forman estas líneas. Entonces, si este ángulo depende de la magnitud de los ángulos A y B, se debe presumir que el número de grados que abarcan los ángulos A y B debe determinar el número de grados que debe abarcar el ángulo C. Por tanto, dicho ángulo puede servir para verificar las operaciones que se hayan hecho para determinar los ángulos A y B. Estaremos seguros de que se han medido bien los ángulos A y B, si midiendo el ángulo C se encuentra el número de grados correspondiente a la magnitud de los ángulos A y B. Para hallar cómo se puede deducir la magnitud del ángulo C a partir de las magnitudes de los ángulos A y B, examinemos lo que ocurrirá a este ángulo si las líneas AC y BC se aproximan o separan una de otra.



Supongamos, por ejemplo, que BC, al girar alrededor del punto B, se separa de AB y se acerca a BE. Resulta claro que durante este giro de BC, el ángulo B se abre continuamente; y que, por el contrario, el ángulo C se cierra cada vez más. Este hecho puede hacer sospechar que, en este caso, la disminución del ángulo C iguala el aumento del ángulo B. De este modo, la suma de los ángulos A, B y C es siempre la misma, cualquiera que sea la inclinación de las líneas AC y BC sobre la línea AE.

LXIII



Esta inducción lleva con ella su demostración; porque si se traza ID paralelamente a AC se observa, en primer lugar, que los ángulos ACB y CBD, llamados ángulos alternos, son iguales. Esto es evidente puesto que las líneas AC e IB, al ser paralelas, están igualmente inclinadas sobre CBO. Con esto, el ángulo IBO también es igual al ACB. Pero el ángulo IBO también es igual al ángulo CBD, porque la línea ID no está más inclinada sobre CO de un lado que de otro. Por tanto, el ángulo DBC, igual al IBO, es igual al ángulo ACB, su alterno.

LXIV

En segundo lugar, se ve, que el ángulo CAE es igual al ángulo DBE, a causa de las paralelas CA y DB. Entonces, los tres ángulos del triángulo se pueden poner unos al lado de los otros, unidos por sus vértices en el punto B. Por tanto, los tres ángulos DBE, CBD y CBA, que son iguales a los tres ángulos CAB, ACB y CBA, son iguales a dos ángulos rectos (Artículo LVII). Todo lo que acabamos de decir se puede aplicar a cualquier triángulo. En consecuencia, está asegurada la siguiente propiedad general: la suma de los tres ángulos de un triángulo es constantemente la misma e igual a dos rectos o, lo que es lo mismo, a 180 grados.

LXV

Para concluir, el valor del tercer ángulo de un triangulo, cuando se conoce la medida de los otros dos, se halla restando de 180 grados el número de grados que los dos ángulos tienen en conjunto. Propiedad que proporciona una manera bien cómoda de verificar la medida de los ángulos de un triángulo y que, como veremos a medida que avancemos, tiene muchas utilidades más. Nos contentaremos aquí con mostrar las consecuencias más inmediatas.

LXVI

Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto, y con mayor razón no puede tener más de un ángulo obtuso.

LXVII

Si uno de los tres ángulos de un triángulo es recto, la suma de los otros dos ángulos siempre es igual a un recto.

Estas dos proposiciones son tan claras que no hay necesidad de demostrarlas.

De forma general, en el texto (Ilustración 1) se descubren dos partes claramente diferenciadas. La primera (párrafo LXII) constituye una fase exploratoria previa a la segunda: el establecimiento de la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo. Esta propiedad se demuestra en los párrafos LXIII y LXIV.

Clairaut empieza con una advertencia metadiscursiva (*l.* 1-4). Avisa al lector de que falta un procedimiento –se entiende aquí como razonamiento– que se desprende de la instrumentación en el entorno lápiz-papel y que se plantea de forma idealizada, hasta poderlo utilizar para corregir un eventual pensamiento instrumentado. Acto seguido, anima la comunicación, intentando poner al lector en una disposición receptiva («este procedimiento es simple y fácil», *l.* 4-5), justo antes de situar el problema en un contexto ya conocido («retomemos…», *l.* 5). Junto con la tercera persona del singular para introducir los conceptos geométricos (pronombres personal reflexivo o indefinido), utiliza la primera persona del plural para que el lector participe con él.

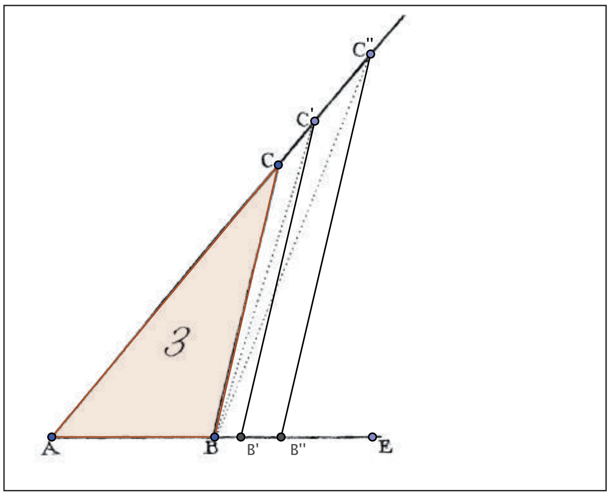
La experimentación se inicia con el reconocimiento de una relación funcional, representada verbalmente, entre los ángulos del triángulo ABC («C depende de… A y B», *l.* 5-6). Contrariamente a una hipótesis matemática, que se hubiera tomado como postulado, Clairaut necesita justificar su conjetura con una inferencia discursiva. El «sabemos» (*l.* 5) no se refiere a un dato conocido, sino al anuncio de un resultado, admitido provisionalmente, que va a pasar por el control de la experimentación. Para ello, describe el efecto del cambio (variación funcional), puesto que el ángulo C está definido con los lados CA y BC. Parece que el punto C ya se mueve («por consiguiente, [cambia] también [la posición del] ángulo C», *l.* 7), mientras los puntos A y B están determinados.

El autor trata después la relación funcional con los valores («número de grados», *l.* 9) que puede tomar la función («que abarcan los ángulos A y B», *l.* 9), como si estuviera en ciencias experimentales. De hecho, convierte el concepto de magnitud, el ángulo, en un concepto de magnitud medida, el ángulo con grados. Su idea consiste en utilizar un razonamiento matemático («se puede deducir», *l.* 14) para controlar los resultados empíricos («verificar las operaciones que se hayan hecho», *l.* 11). Si la verificación a que se refiere es matemática («se encuentra el número de grados correspondiente», *l.* 13), las operaciones que están en juego no son cálculos con los valores de una relación funcional, sino el acto de medir en sí («estaremos seguros de que se han medido bien», *l.* 12).

En cambio, cuando se concreta la experimentación («examinemos lo que ocurriría», *l.* 15), se plantea en el mundo matemático. Clairaut introduce una figura que soporta un experimento mental a partir de la representación de un caso particular («supongamos, por ejemplo, que BC», *l.* 17). En el dibujo, se simula el desplazamiento del punto C en una trayectoria lineal a partir del punto A. Pero con el texto (*l.* 17-19), se puede pensar que C sigue una trayectoria circular, como si se desplazara entre A y E en una circunferencia indeterminada de centro B. A pesar de ello, está claro que es el dibujo que crea el experimento y que ayuda al lector, coordinando texto y dibujo, a visualizar por qué cuando «el ángulo B se abre continuamente» (*l.* 18-19), «el ángulo C se cierra cada vez más» (*l.* 19).

Sin embargo, el paso siguiente resulta sorprendente («este hecho puede hacer sospechar», *l.* 19-20). Aunque el lector podría considerarlo nada más como una suposición, es difícil, únicamente con los argumentos anteriores, entender de repente por qué «la disminución del ángulo C iguala el aumento del ángulo B» (*l.* 20-21). ¿Qué intuición tiene Clairaut cuando menciona que «en este caso» (*l.* 20), la variación se compensa? Aquí el lector tiene que involucrarse un poco más. Dado que la propiedad de los ángulos alternos-internos está en el aire –la demuestra en el párrafo siguiente–, se puede especular con una idea que se base esencialmente en la figura 3:

Figura 2
Visualización de la relación «aumento-disminución» de los ángulos B y C.



Mediante la consideración de las paralelas a (BC) que pasan por los puntos C' y C" (Figura *2*), se establece en un vistazo que, al pasar de C a C', el aumento en relación con el ángulo B (o *mes*(CBC')) es igual a la disminución en relación con el ángulo C (o *mes*(B'C'B). En términos de visualización, la igualdad aumento-disminución queda más evidente al pasar de C a C". Asimismo, podemos imaginar que C" se desplace hacia el infinito, de modo que la recta (BC") llegaría a confundirse con la recta (BD) del esquema 4. En el límite, esta consideración acercaría la fase exploratoria a la demostración y ayudaría al lector a entender, más adelante, la sorprendente formulación «los tres ángulos… son iguales dos ángulos rectos» (*l.* 33-34).

El párrafo LXIII empieza con una frase bisagra («esta inducción lleva con ella su demostración», *l.* 23). Mientras el sentido de «demostración» queda claro en este contexto, el término «inducción» puede referirse tanto a un proceso de generalización como a un hecho inferencial. Clairaut acaba de concluir que la suma de los ángulos no cambia de valor al sufrir determinadas transformaciones («cualquiera que sea la inclinación», *l.* 22). Si el reconocimiento de esta invariante parte del experimento, el autor generaliza el tratamiento del caso particular con una racionalidad inductiva típica de las ciencias experimentales. Puesto que la demostración siguiente procede con una racionalidad matemática, podemos entender que la expresión «lleva con ella» no significa que el argumento contiene la esencia de la demostración, sino que tiene consigo lo que hace falta para empezar un razonamiento deductivo. Dicho de otro modo, no está anunciando que va a transponer una versión deductiva del argumento que le permitió inferir que «la suma de los ángulos A, B y C es siempre la misma» (*l.* 21), sino que, gracias al argumento empírico, el lector puede empezar el estudio de la demostración en un contexto conocido y con un grado de convicción razonable acerca de la propiedad de la suma (incremento del valor epistémico).

La demostración se desarrolla en dos partes. En el párrafo LXIII, se establece «en primer lugar, que los ángulos ACB y CBD… son iguales» (*l.* 24-25), reproduciendo la demostración de la propiedad de los ángulos alternos-internos aún utilizada en la enseñanza secundaria. Se tienen en cuenta los ángulos correspondientes ACB e IBO (*l.* 26), los ángulos opuestos IBO y CBD (*l.* 27) y, para rematar, la transitividad de la igualdad (*l.* 28-29). En el párrafo LXIV, se establece directamente «en segundo lugar, que el ángulo CAE es igual al ángulo DBE» (*l.* 30), utilizando implícitamente la propiedad de los ángulos correspondientes, para concluir en cadena que «los tres ángulos DBE, CBD y CBA… son iguales a los tres ángulos CAB, ACB y CBA… son iguales a dos ángulos rectos» (*l.* 32-34). De hecho, las propiedades matemáticas se aplican, pero no se mencionan como tales, dejando al lector la responsabilidad de complementar las justificaciones. Sin embargo, Clairaut le quiere ayudar cuando precisa el contexto de aplicación («al ser paralelas, están igualmente inclinadas», *l.* 25-26, «no está más inclinada sobre CO de un lado que de otro», *l.* 27-28 y «el ángulo… es igual al ángulo…, su alterno», *l.* 28-29).

El final de la demostración puede resultar sorprendente para un lector moderno (*l.* 34-37). A pesar de que la estructura del razonamiento es impecable, parece ser que Clairaut necesita reforzar el carácter genérico de la demostración, como si cualesquiera de los elementos geométricos del texto o del esquema 4 no fueran suficientes de antemano. No obstante, dado el papel de la inducción en la parte experimental, podemos considerar que se trata de una precaución afortunada para el lector poco acostumbrado al discurso deductivo o que se está familiarizando con la racionalidad matemática. En todo caso, sólo por el mero hecho de subrayarlo, el lector puede volver a leer la demostración y confirmar, si ya no lo había hecho, que el establecimiento de la conclusión se sostiene en relación con la conjetura inicial. Además de evidenciar lo invariante de la relación funcional («la suma… es constantemente la misma», *l.* 36-37), el vaivén (movimiento) que se crea al leer el texto y la figura, al completar el discurso implícito o al repasar los razonamientos propuestos se fija ya para el lector. Aquí está el reconocimiento de un saber institucional que se ha construido con y por el razonamiento.

Ilustración 3
Reproducción del cuestionario.

En 1741, el matemático francés Alexis Claude Clairaut escribió un tratado de geometría en el que demostraba, entre otros resultados, que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es igual a 180°. Para entender su discurso, además de ver cómo se explicaban las matemáticas entonces, proponemos las siguientes actividades que utilizan el Cabri II Plus.

1. Lee el artículo LXII y haz una construcción, con el Cabri, a partir de lo que dice Clairaut. Guarda el archivo «.fig».
   Indica lo que se ve en tu dibujo y lo que puedes visualizar con el movimiento.

2. Al desplazar el punto «C'» – es decir el punto C que se mueve, como el de la figura que da Clairaut – sobre la prolongación del lado AC, el autor dice: *Este hecho puede hacer sospechar que, en este caso, la disminución del ángulo C iguala al aumento del ángulo B.* ¿Esta disminución y aumento son proporcionales entre sí? ¿Por qué?

3. En el artículo LXIII se dice: *Esta inducción lleva con ella su demostración.*
   a) ¿Qué es una inducción? Usa Google o http://buscon.rae.es/draeI.
   b) ¿Cuál es la inducción que fundamenta su argumento en el artículo LXII?
   c) Compara el argumento utilizado en la fase de inducción (LXII) con el argumento utilizado en la fase de deducción (LXIII y LXIV).
   d) ¿Se puede decir efectivamente que «esta inducción lleva con ella su demostración»? ¿Por qué?

4. Representa con el Cabri II Plus la situación presentada en LXIII y LXIV. Guarda el archivo «.fig».
   El autor dice: *Todo lo que acabamos de decir se puede aplicar a cualquier triángulo.*
   a) ¿Cómo puedes utilizar el Cabri para justificar esto?
   b) El argumento que acabas de utilizar, ¿es una inducción o una deducción?

4. EL CUESTIONARIO

Las actividades propuestas recogen, a su manera, las grandes líneas del análisis anterior. Incluyen consideraciones discursivas, metadiscursivas y no discursivas con los signos gráficos y las acciones en la interfaz del Cabri II Plus. Se destinan a alumnos de 15-17 años y se estructuran en el cuestionario anterior (Ilustración 3):

Las actividades 1 y 2 conciernen a la fase experimental, mientras que las actividades 3 y 4 se refieren esencialmente a la fase de demostración, aunque sirven igualmente de enlace entre ambas. Después de un párrafo introductorio, que motiva nuestra intención general, la actividad 1 atañe a una familiarización del contexto particular y una primera integración de los argumentos geométricos involucrados en el texto de Clairaut. Se pide construir, con el software Cabri II Plus, la figura que se desprende del párrafo LXII. Para evitar que el alumno reproduzca la figura 3 únicamente como un dibujante, se pide una interpretación de lo que se ve (formulación impersonal). En lugar de ello, puede que describa los pasos de su construcción, de modo que pedimos también que nos indique lo que podría visualizar con el movimiento (interpretación personal). Es posible que conjeture sobre la suma y que constate, empíricamente, si la conjetura de Clairaut se sostiene al medir ángulos con la herramienta «medida de ángulo».

En la actividad 2, pedimos si la sospecha del autor, durante la variación concomitante de los ángulos C y B, conduce a una relación proporcional. Matemáticamente, esta pregunta parece extraña, puesto que se trata de la relación idéntica. No obstante, si hubiéramos formulado la pregunta en términos de igualdad, los alumnos hubieran podido adelantarse a la demostración y, por tanto, cambiar «prematuramente» de racionalidad. Con la idea de proporcionalidad, cuyo sentido en ciencias experimentales se suele plantear independientemente de los valores que pueden tomar las variables, el juego «aumento-disminución» podría considerarse, al menos temporalmente, como un fenómeno de «ampliación-reducción» en una especie de «figura-laboratorio». Además, al utilizar la herramienta «medida de ángulo» del Cabri II Plus, cuyos cálculos están gestionados por el software, el alumno puede responder en términos de magnitud, es decir, refiriéndose por esencia al concepto de ángulo, independientemente de su medida, aunque se expresa sólo con números. En cuanto a la justificación (respuesta al «¿Por qué?»), no tenemos a priori una construcción geométrica susceptible de explicar inmediatamente la sospecha de Clairaut. Aun así, el alumno podría encontrar un argumento parecido a las explicaciones que propusimos en torno a la Figura 2.

El contexto de la actividad 3 es difícil, pero vehicula una gran utilidad pedagógica para contrastar explícitamente los procesos inductivos y deductivos presentes en el aprendizaje de las matemáticas. Aquí se trata de encontrar una definición corriente (pregunta a)) y aplicarla para identificar un proceso inductivo en el párrafo LXII (pregunta b)). Como vimos en el *apartado 3*, es posible que la inducción se refiera tanto a un proceso de generalización como a un hecho inferencial. Aceptamos de antemano que las competencias metadiscursivas del alumno aún están en rodaje, para no decir que le costará asegurar una comparación sobre la estructura general de cada proceso y que ésta podría no ser concluyente. Sin embargo, es competente para contrastar la función de la conjetura o de la conclusión en cada proceso. Es decir, que en el primer caso, la conjetura está en instancia de verdad (el «hace sospechar» del texto), mientras que en el segundo caso se ejecuta como una conclusión. De todos modos, si la pregunta c) favorece una respuesta matemática en la comparación de las fases, la pregunta d) insiste en una consideración metamatemática sobre ella.

La actividad 4 se sitúa precisamente en la demostración. De forma análoga al tratamiento en la actividad 1, pedimos una construcción con Cabri II Plus a partir de la situación presentada en los párrafos LXIII y LXIV. Gracias a la cita, pretendemos que el alumno manifieste, de un modo u otro, el valor fijado, pero convencional, de la situación geométrica (p. ej. los puntos son cualesquiera), cuyo valor incumbe tanto a la generalización de la conclusión como en los argumentos que se emplean para establecerla. En la pregunta a), se puede utilizar el desplazamiento con el software para generar cualquier figura (configuración) que respeta la lógica de la construcción, revelando así el carácter invariante de la suma (conclusión) o de los pasos deductivos (comparación de ángulos). Puesto que el valor epistémico ha cambiado para el alumno y que ya conoce la demostración, tendría que utilizar una justificación distinta al argumento que empleó en la actividad 1. Por esto, con la pregunta b), pensamos evaluar si el alumno ha modificado su concepción después de conocer la demostración o a qué atribuye lo que son los procesos inductivos y deductivos.

5. MARCO METODOLÓGICO

Con la intención de evaluar la posible sinergia entre lo que podemos llamar la «iluminación histórica» y la instrumentalización técnica con el Cabri II Plus, se experimentaron las actividades del cuestionario con ocho alumnos de 1.º de bachillerato que ya tenían experiencia con el manejo del software. Todas las sesiones tuvieron una duración media de 90 minutos y las intervenciones de los profesores-tutores se centraron en la presentación del material.

Para analizar las respuestas de los alumnos, consideramos un marco metodológico que añade, al marco teórico, la definición de «concepción» en el modelo de conocimientos de Balacheff y Margolinas (2005). Con la noción de concepción llegamos a dar cuenta del estado del aprendizaje a partir de las situaciones-problemas. Para los autores (2005), la concepción se refiere al estado de equilibrio de un bucle acción-retroacción del sistema sujeto-medio bajo condicionantes «proscriptivos» de viabilidad. Por otra parte, el sistema sujeto-medio es el sistema cognitivo compuesto de la interacción alumno-medio. Es decir, que el sujeto y el medio se definen mutua y dialécticamente por la naturaleza y la dinámica del juego de sus acciones y retroacciones. Dicho de otra forma, no es el alumno como sujeto psicológico que aprende, sino el alumno en interacción con los conocimientos de un texto, un software o compañeros colaboradores que condicionan su aprendizaje. De modo que si prestamos atención a un alumno dado, el medio con que interactúa puede ser material o intelectual.

En nuestro estudio, una concepción se describe por sus componentes asociados. De acuerdo con los autores, una concepción (**C**) se caracteriza por un conjunto definitorio de problemas (P) para los cuales aporta herramientas de resolución (R) basándose en sistemas de representación (L) y una estructura de control (Σ) que permite juicios y decisiones. Simbólicamente, $\mathbf{C} = (P, R, L, \Sigma)$. De modo que, para cada alumno –ya que el *apartado 4* presentó un análisis a priori de los problemas propuestos–, damos cuenta de las concepciones a partir de los operadores y los elementos del lenguaje explicitados en las soluciones. En cuanto a las estructuras de control que intervienen en éstas, subrayamos que una parte de los controles se gestiona inevitablemente por el software de geometría dinámica, como la preservación de la lógica de la construcción durante el desplazamiento. No obstante, mientras el alumno puede sacar una propiedad de un dibujo estático por el mero recuerdo de una experiencia ya realizada con el Cabri II Plus, también puede imaginar un movimiento en ella y controlar la permanencia o la validez de esta propiedad con un razonamiento gráfico (Richard, 2004a), de forma que si se puede atribuir al sujeto o al medio una responsabilidad específica en el control de una propiedad que aparece con un dibujo dinámico, tiene que ser por carácter dominante, no necesariamente exclusivo. Aun así, puesto que nuestro marco teórico considera justamente el aprendizaje instrumentado, no nos interesa tanto la independencia que podría desarrollar el alumno, a la larga, en su relación con la herramienta. Aceptamos que los controles pertenecen al conjunto del sistema sujeto-medio, aunque intentamos identificar cuál de los dos (sujeto o medio) es el responsable dominante.

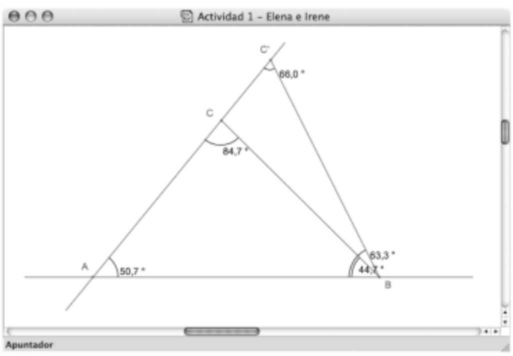
El caso de Paula

Durante el uso del Cabri II Plus, los procesos de instrumentación e instrumentalización suelen intervenir por momentos, aunque algunos tienen más relevancia que otros. En la solución de Paula (Esquema 4), la obligada construcción de una figura a la interfaz es a la vez una representación y una instrumentalización, mientras que la extracción de propiedades figurales procede tanto por visualización como por instrumentación. Como Clairaut, Paula utiliza su dibujo para mostrar una propiedad difícil de ver sin movimiento. Pero en lugar de sugerir un desplazamiento, lo engendra con el software. De modo que si Clairaut lo necesita para ilustrar una variación, Paula lo utiliza como tela de fondo para generalizar su particularización del problema («podría ver infinitos triángulos» y «lo mismo ocurre con cualquier otro triángulo ABC»).

El dibujo dinámico centra el experimento de Paula, como si la figura 3 de Clairaut ya se hubiese quedado en el texto («puedo modificar C moviendo C_1»). Mientras sus dos primeras frases son más bien descriptivas, Paula parece anticipar una consideración métrica que desemboca en un razonamiento (trozos (3) y (4)). El dibujo de Paula (Esquema 4), cuando se mostraba sin medida de ángulos, habría sido poco sugerente si hubiera sido estático. Porque es el movimiento, más que las propiedades que se desprenden de una lectura del dibujo, el que representa «cómo cambian los ángulos A, B y C»[2]. Aun así, cuando desplaza C_1, los puntos A, B y C no se mueven realmente. Paula está asimilando la familia de triángulos ABC_1 con un triángulo ABC de referencia y sus respectivos ángulos. Por tanto, hay el inicio de un razonamiento gráfico en la comparación de ángulos, pero no le parece del todo concluyente sin medidas. De aquí su estrategia de medir ángulos, razonar a partir de estos resultados y averiguar que la propiedad permanece verosímil con el desplazamiento (Ficha 5).

Esquema 6

Solución de Elena e Irene.



Dos rectas que forman un ángulo las unimos con un segmento. Cuando movemos el punto C', el ángulo C' disminuye y B aumenta.

Ficha 7

Solución de Elena e Irene.

Concepción: reproducción instrumentada de un experimento.
R : construcción de una figura, medida de ángulos, desplazamiento del punto móvil, escritura.
L : gestos inherentes a la construcción y al desplazamiento, representación figural y numérica en la pantalla, traducción verbal.
Σ : ***sujeto***: control paso a paso de las etapas de la construcción, coordinación discursiva con la información en la pantalla; ***medio***: control sucesivo de la representación en la pantalla, control sucesivo de las medidas, control de la lógica de construcción durante el desplazamiento, gestión de la racionalidad en el texto de Clairaut.

El caso de Elena e Irene

En esta actividad, Elena e Irene no manifestaron la misma creatividad que Paula. De forma general, utilizaron el Cabri II Plus para reproducir el experimento de Clairaut, sin sacar conclusiones que van más allá de una constatación espacial instrumentada por el software («cuando movemos el punto C', el ángulo C' disminuye y B aumenta», ficha 7). Aunque su construcción es similar a la situación de Paula, el razonamiento de los sujetos no aparece explícitamente. Además, el primer desplazamiento del punto C' sólo se efectuó después de haber medido los ángulos. Tampoco hubo cálculos explícitos, como si el hecho de medir con la herramienta «medida de ángulo» no hubiera sugerido nada más para la constatación empírica sobre la variación, o que fuera una respuesta más o menos inmediata a lo sugerido en el texto de Clairaut. De nuestra observación, no sabemos hasta qué punto Elena e Irene trabajaron con un objetivo común. Pero notamos que, en la «colaboración» entre ambas durante el experimento, Elena ha sido claramente la alumna que conducía la resolución, mientras Irene era poco reactiva a las iniciativas de su compañera. Por tanto, su contribución argumentativa es mínima, por no decir ausente. Por esto consideramos que es el medio (aquí material) que ha gestionado la racionalidad (Ficha 7) y, porque éste estaba expuesto de antemano, Elena se ha limitado a mostrar lo más evidente que se podía visualizar con el Cabri II Plus.

El caso de Mauro

El comportamiento de Mauro es bastante diferente. Solicita la intervención del docente y éste le orienta con preguntas dirigidas (Esquema 8). Mauro responde por escrito a cada intervención, lo que se convierte en una solución en cuatro etapas:

1) Comparación visual sobre la variación en dos triángulos (ABC y ABC_1). No hay medidas de ángulos ni para pendientes. El texto traduce un razonamiento gráfico sobre un mismo caso de figura y muestra dos inferencias semánticas.

2) Conjetura sobre la suma de los ángulos B y C y confirmación métrica sobre la comparación visual a partir de un mismo caso de figura. El razonamiento y los cálculos pertenecen al alumno (traducción discursiva de un razonamiento gráfico: «esto se puede observar en la construcción que he realizado con Cabri II Plus»; cálculos a mano en el borrador), el software se utiliza esencialmente para la representación figural y la medida de ángulos.

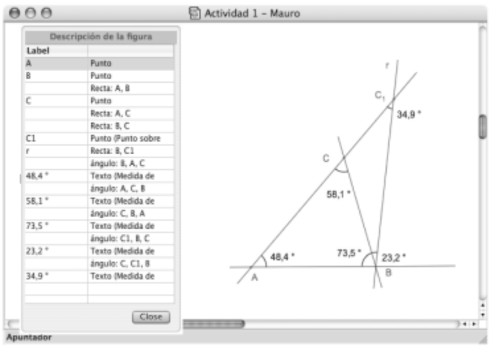
3) Extensión de la suma con el ángulo A y reutilización de los argumentos anteriores.

4) Conjetura sobre la suma de los ángulos de un triángulo y generalización al triángulo cualquiera a partir del carácter arbitrario de la construcción, además de una simulación verbal de una variación métrica para reforzar su argumento.

Mauro demuestra un alto grado de visualización, el dinamismo del software se utiliza poco (Ficha 9). Aunque estuvo estimulado por el docente, este alumno quiere escribir, y su razonamiento esencialmente discursivo le proporciona el «dinamismo» suficiente para entender a Clairaut y conjeturar de forma autónoma respecto al software. Si la instrumentalización parece más elevada en Paula, es justamente porque el razonamiento escrito de Mauro compensa. Aun así, el argumento de fondo es parecido, sobre todo en torno al aumento/disminución de los ángulos B y C. Pero la estrategia empleada en el sistema sujeto-medio proporciona más autonomía a Paula, incluso con menos texto.

Esquema 8

Solución de Mauro



Texto de Mauro (1): El ángulo A queda igual, ya que no he cambiado la pendiente de ninguna de las 2 rectas que lo definen, sin embargo los ángulos B y C_1 si han variado, ya que he cambiado la pendiente de una de las rectas que los constituyen, la recta r.

Intervención del docente (1): A ver, ¿qué sucede con la suma de los ángulos B y C_1?

Texto de Mauro (2): La suma de los ángulos B y C_1 es igual a la de la suma de los ángulos B y C, esto es así ya que al aumentar el ángulo B, cambiaríamos la pendiente de la recta que pasaba por los puntos B y C, haciendo que esta recta se corte en otro punto con la recta que pasa por los puntos A y C, por lo tanto en ese punto de corte se situaría el nuevo vértice, el ángulo C_1. Ese ángulo es menor al ángulo C, pero esa cantidad que ha disminuido, es decir $C - C_1$, es igual a la cantidad que ha aumentado el ángulo B. Esto se puede observar en la construcción que he realizado con Cabri.

Intervención del docente (2): Ahora, ¿qué ocurre con la suma de los ángulos A, B y C_1?

Texto de Mauro (3): La suma de los ángulos A, B y C_1 es igual a la de los ángulos A, B y C. Esto es así debido a que como he explicado antes, la suma de los ángulos B y C_1 es igual a la de los ángulos B y C. Y como el ángulo A no ha variado, entonces la suma será la misma.

Intervención del docente (3): Entonces, ¿qué puedes conjeturar a partir de los resultados anteriores?

Texto de Mauro (4): A partir de los datos anteriores puedo conjeturar que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es de 180º. Esto sería así ya que cualquier triangulo se ve definido por 3 puntos, y estos 3 puntos por 3 rectas distintas, que se cortan en los vértices. Partiendo del triángulo que he construido, puedo construir cualquier triángulo, aumentando o disminuyendo el valor de los ángulos, y esos triángulos tendrán todos la misma suma de ángulos.

Ficha 9

Análisis resumido de la primera solución de Mauro.

Concepción: razonamiento discursivo instrumentado por el medio.
R : construcción de una figura, comparación visual sobre ángulos y pendientes, escritura de (1), intervención (1), medida de ángulos, cálculo aritmético y comparación de sumas, razonamiento discursivo (2), intervención (2), razonamiento discursivo (3), intervención (3), razonamiento discursivo (4).
L : gestos inherentes a la construcción, representación figural y numérica en la pantalla, conversión y traducción verbal, expansión gráfica y discursiva.
Σ : ***sujeto***: control de las etapas de construcción con el protocolo de la construcción, coordinación discursiva con la información en la pantalla, control paso a paso de los algoritmos de la suma y de la resta, razonamiento gráfico y discursivo; ***medio***: control de la representación en la pantalla, control de las medidas, planteamiento de conjeturas intermedias.

Actividad 2

En términos estrictos de éxito, ningún alumno supo responder plenamente a las preguntas propuestas. Es útil recordar que la dificultad esperada, que consiste en tratar directamente la relación idéntica como una proporcionalidad, es un fenómeno conocido en didáctica de las matemáticas (p. ej. Comin, 2002). Aun así, los alumnos encontraron maneras distintas de solventar esta dificultad, aunque fuese de forma parcial o poco concluyente. Paula, con la formulación de un contraejemplo («cuando el ángulo C se reduce a la mitad, el ángulo B no se hace doble», tabla 10), intenta invalidar la proporcionalidad. Es evidente que, matemáticamente, su argumento no invalida nada más que el caso mencionado (relación doble-mitad). Pero con el Cabri II Plus, seleccionó casos que merecían su atención, después de haber construido el caso particular para 2. Si bien no lo menciona explícitamente, podemos intuir que su solución sintetiza un conjunto de contraejemplos que resulta de una experimentación anticipada. En este caso, su comportamiento instrumentado sería análogo a su resolución de la actividad 1.

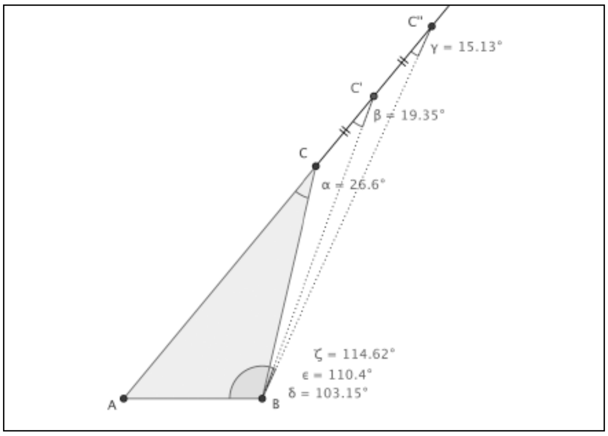
Tabla 10

Solución de los alumnos a la actividad 2.

PAULA	ELENA E IRENA	MAURO
No, porque cuando el ángulo C se reduce a la mitad, el ángulo B no se hace doble.	La suma de los ángulos del triángulo es 180º. Teniendo en cuenta un ángulo fijo, todo lo que aumente uno lo disminuye el otro.	Esta disminución y aumento de los ángulos no es proporcional, ya que no hay ninguna relación existente entre las variaciones de ángulos de vértices situados a la misma distancia los unos de los otros.

Podemos intuir algo parecido con el comportamiento de Elena e Irene. Aunque no se pronuncian sobre la proporcionalidad o la igualdad, parecen querer generalizar su experimento de la primera actividad con «teniendo en cuenta un ángulo fijo, todo lo que aumente uno lo disminuye el otro» (Tabla 10). ¿Plantean una consideración experimental con magnitudes, dejando otra vez a Clairaut la gestión del razonamiento? En todo caso, para dar coherencia a su propósito, necesitan ligar los ángulos a una constante («la suma de los ángulos del triángulo es 180º», tabla 10), invirtiendo de hecho el argumento del autor que aparece al final del párrafo LXII («de este modo, la suma de los ángulos A, B y C es siempre la misma», *l.* 21). Es posible que antes de resolver la actividad, las alumnas conocieran la propiedad de la suma, lo que constituiría una especie de obstáculo didáctico para entender la pretensión del texto, como si la veracidad de esta propiedad fuera tan asumida de antemano que resultaría aceptable como argumento contextual. Pero por otro lado, podría ser el síntoma de una confusión, incluso la marca de un desconocimiento, de la lógica que consiste en empezar un razonamiento por las hipótesis de una situación y terminarlo por su conclusión (Richard, 2004b).

Figura 11
Interpretación figural del argumento de Mauro.



Mauro da una respuesta más matizada. Para justificar que «esta disminución y aumento de los ángulos no es proporcional» (Tabla 10), comienza diciendo que «no hay ninguna relación existente entre las variaciones de ángulos» (*ibídem*). Si interpretamos la ausencia de relación en términos de magnitudes, podemos constatar que no se encuentran, en el texto de Clairaut, indicios que pudieran dar cuenta de la proporcionalidad con argumentos físicos. De hecho, a pesar de que el autor conjetura claramente con la igualdad, resulta aventurado saber exactamente cuál es su intuición en el juego «aumento-disminución» (ver *apartado 3*). Es la razón por la cual pensamos que Mauro necesita especificar de qué variación se trata, aunque el sentido de su proposición complemento no queda del todo claro. A lo mejor, con los «vértices situados a la misma distancia los unos de los otros» (*ibídem*), se refiere a una sucesión de paralelas «(B'C')» como lo anticipamos en torno a la Figura 2. En este caso, el carácter genérico del argumento de Mauro se sostendría y permitiría entender por qué, al desplazar el punto C' sobre la prolongación del lado AC, no reconoce ninguna proporcionalidad cuando compara familias de ángulos «C'» y «B'». Pero «la misma distancia» podría significar algo como «C = C' = C''», por C' y C'' sobre la prolongación de AC (Figura 11). De modo que compararía, al pasar de C a C' ó C'', el aumento de la distancia lineal con la disminución del ángulo «C», como si asistiéramos a un experimento de «ampliación-reducción» (*apartado 4*), además de comparar simultáneamente la variación de los «C» con el aumento de los «B» correspondientes. En cualquier caso, Mauro vuelve a utilizar el medio para instrumentar su razonamiento, pero aquí se limita al uso de la herramienta informática.

Actividad 3

Para definir lo que es una inducción, los alumnos encontraron definiciones parecidas que no son copias procedentes de una misma fuente. Con una averiguación sencilla al teclear la palabra «inducción» en Google, es decir, comparando las definiciones de los alumnos a partir de las primeras entradas que devuelve el motor de búsqueda, sabemos que hicieron el esfuerzo de adaptar sus definiciones al contexto de la actividad. Mientras Paula y Mauro se refieren al proceso de generalización («proceso de razonar» y «consiste en conseguir», tabla 12a), Elena e Irene mencionan el hecho inferencial («es la conclusión», *ibídem*), aunque se puede atribuir también al carácter genérico del caso cualquiera (ver *actividad 4*). Por tanto, en respuesta a la pregunta b, resulta lógico que Paula cite directamente a Clairaut («este hecho… la línea AE», tabla 12b) y que Mauro recupere la idea principal del autor («en el primer texto… el ángulo C», *ibídem*). Sin embargo, Elena e Irene están aún influenciadas por el conocimiento previo de la propiedad de la suma al justificar que «al alterar [un ángulo], obligatoriamente se altera el otro, teniendo un ángulo fijo» (*ibídem*). ¿Por qué se expresan únicamente en términos de alteración, no de igualdad? Si bien podría indicar una falta de entendimiento del razonamiento de Clairaut, pensamos que desvela una marca de confianza que depositan en el autor. Esta confianza les permitiría cambiar el valor epistémico de su respuesta, respecto a la actividad 2 (ver su solución en la tabla 9), y representar una generalización del argumento de Clairaut, sin necesidad de explicitar un razonamiento ausente. Además, esta disposición explicaría el vacío repentino a la pregunta c (simbolizado en la tabla 12 con «∅»), puesto que después, en la pregunta d, no tienen reparos en responder. Dicho de otro modo, aunque no vean el argumento en la fase de inducción, pueden argüir, a partir de la demostración, por qué el párrafo LXIII muestra un razonamiento completo. Es como si Elena e Irene acompañaran a Clairaut con gusto, pero que perdieran una parte de sus recursos por culpa de su discurso tácito, tanto a nivel de contenido como modos de razonar.

El comportamiento de Paula aparece más iluminado. Además de comparar eficazmente los argumentos del autor en cada fase (tabla 12c), contrasta claramente las funciones de conjetura y de conclusión para la misma propiedad. Identifica magníficamente lo que significa cada proceso («se trabaja… y se descubre» versus «se demuestra», *ibídem*), lo que desemboca en una crítica atrevida («creo que no…», tabla 12d). Aunque tenga razón al comparar el contenido matemático involucrado, no es evidente contradecir, en sí mismo, un texto escrito, sobre todo un texto personalizado con aura de clasicismo. El colmo hubiera podido ser, en respuesta a la pregunta d, completar su argumento matemático con una consideración metamatemática explícita. Pero ¿por qué ir tan allá si, en la pregunta c, acaba de describir justamente cada proceso? En cualquier caso, recoge sin modificación las ideas de Clairaut para dar una primera impulsión a sus argumentos, como si su facilidad al entender los motivos del autor fuera suficiente para provocar sus soluciones.

Por su parte, Mauro necesita reinterpretar el texto. Compara cada fase a partir de una descripción del «argumento» con que se quedó («el argumento utilizado por el autor en la fase de inducción…» y «pero en la fase de demostración, el autor utiliza el argumento…», tabla 12c). De forma similar a su respuesta en b, Mauro insiste en la variación de los ángulos. Pero en lugar de recuperar

Tabla 12
Solución de los alumnos a la actividad 3.

	PAULA	ELENA E IRENE	MAURO
a)	Proceso de razonar de lo particular a lo general.	Inducción es la conclusión general que se saca de casos particulares.	Una inducción matemática consiste en conseguir verdades generales a partir de verdades particulares.
b)	Este hecho puede hacer sospechar que, en este caso, la disminución del ángulo C iguala el aumento del ángulo B. De este modo, la suma de los ángulos A, B y C es siempre la misma, cualquiera que sea la inclinación de las líneas AC y BC sobre la línea AE.	Todos los triángulos tienen una suma de ángulos de 180º, por lo que al alterar uno, obligatoriamente se altera el otro, teniendo un ángulo fijo.	En el primer texto el autor induce que el aumento del ágnulo B provoca una disminución de igual tamaño en el ángulo C.
c)	En la fase de inducción se trabaja con tres posiciones diferentes del punto C y se descubre una propiedad que vale para cualquier triángulo. En la fase de deducción se demuestra la propiedad con un triángulo general.		El argumetno utilizado por el autor en la fase de inducción es el de que el aumento o disminución de un ángulo de un triángulo hace que el ángulo con que comparte un lado varíe también pero a la inversa. Pero en la fase demostración, el autor utiliza el argumento de que el ángulo formado al cortarse dos rectas será igual al formado al cortarse la paralela de una con la otra recta, demostrando con esto que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º.
d)	Creo que no. No se razona igual en cada caso (en la demostración se dibuja una paralela a uno de los lados del triángulo; en la inducción no).	En el vértice por donde pasa la paralela a la recta opuesta están los tres ángulos del triángulo anterior formando 180º. El ángulo BAC se traslada con la paralela. Lo que queda para completar los 180º es el ángulo ACB.	Sí, ya que demuestra lo que indujo en el texto LXII, que es que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre la misma, y además halla esa cantidad, 180º.

la igualdad en el juego «aumento-disminución», muestra una de sus consecuencias («varíe también pero a la inversa», *ibídem*). Este conocimiento «dinámico» no se encuentra como tal en el texto, ha tenido que sacárselo. Asimismo, a nivel de la expresión, pasa algo parecido en la fase de demostración. Aunque Mauro recupere únicamente el razonamiento propuesto en el párrafo LXIV, tiene que reformularlo a su manera. Puede que su solución pierda en claridad («el ángulo formado al cortarse 2 rectas será igual al formado al cortarse la paralela de una con la otra recta», *ibídem*). Es decir, que falta tener presente el texto de Clairaut para entender que las «2 rectas» son (AC) y (AB) y que «la paralela de una con la otra» se refiere a (BD) y (AB). Pero es como si aceptara que el medio ha hecho su trabajo en especificar de qué va y que ahora le toca a él seleccionar las ideas que le parecen claves. Por tanto, se permite organizar los operadores, la expresión y los controles relativamente a lo propuesto por el medio.

Por otro lado, la respuesta positiva de Mauro en d es interesante. Según él, lo que lleva la inducción en la demostración es el resultado («ya que demuestra lo que indujo… y además halla esa cantidad», *tabla 12d*), aunque éste haya cambiado de valor epistémico y teórico con la demostración. En relación con la definición que dio a la pregunta a, su concepción pasa del proceso de generalización al hecho inferencial. Así, comparando con la respuesta de Elena e Irene, que asumen otra vez de antemano la propiedad de la suma, Mauro manifiesta visiblemente una progresión cognitiva y discursiva en su solución, porque no solamente entiende la diferencia entre una conjetura y una conclusión, sino que muestra una explicación que resulta convincente, hasta un cierto punto, independientemente del texto de Clairaut. En cambio, Elena e Irene no aplican su propia definición, centrando su argumento en torno a los tres ángulos suplementarios que proceden de los párrafos LXIII y LXIV. Además, no toman posición (no hay ni «sí», ni «no»), limitando su respuesta a determinar «lo que queda para completar los 180º» (*ibídem*). De todos modos, ¿cómo pueden opinar Elena e Irene cómodamente sobre procesos de razonamiento si, del análisis de la actividad 2, se desprende que sus competencias discursivas necesitan el apoyo del medio?

Actividad 4

Para todos los alumnos, la representación de la situación con el Cabri II Plus se ajusta básicamente a la figura 4 de los *Éléments*, pero con medidas directas en el dibujo geométrico (Paula, Elena e Irene) o visibles en la ventana algebraica (Mauro). Sin embargo, cuando consultamos los protocolos de construcción, vemos que no se trata de copias conformes. Paula dibujó primero la figura, luego midió los ángulos. Incluso nombró los puntos O, I y D solamente cuando los necesitaba para utilizar la herramienta «medida de ángulo». Asimismo, puso colores diferentes en cada uno de los grupos de ángulos congruentes que considera el autor. Aunque no sabemos si la coloración ocurrió durante la construcción o después, a partir de la figura completa, indica que su dibujo vehicula un razonamiento procedente de su lectura del texto. Sus respuestas siguen siendo sobrias y elocuentes. Apunta claramente que con el movimiento se crean triángulos que comparten una propiedad invariante («en todos ellos se cumple (…)», tabla 13a). Precisa después que este argumento constituye un proceso de generalización, justificándose a partir de la definición que dio en la actividad 3 (Tabla 13b). Aquí no se opone a Clairaut. Porque si las dudas que suscitó cuando comparaba el argumento de cada fase (Tabla 12c y d) parecían expresarse únicamente a nivel del contenido involucrado, ahora constatamos que tiene sentido igualmente en cuanto a las formas de razonar nivel metamatemático alcanzado al ser consciente de aplicar su definición.

De forma aparente, el documento Cabri II Plus de Elena e Irene muestra una figura idéntica a la de Paula, con medidas en los mismos ángulos, pero sin distinción de color. Sabemos, a partir del protocolo de la construcción, que las etapas seguidas, con sus medidas asociadas, se presentan en el mismo orden que en los párrafos LXIII y LXIV. De nuestro análisis del comportamiento desarrollado hasta ahora, no es una gran sorpresa. No obstante, tuvimos muchas dificultades en interpretar la inesperada frase «hemos demostrado lo que habíamos inducido» (Tabla 13b), lo que nos empujó a interrogar a su profesor. Porque, por una parte, Elena e Irene parecen entender el efecto inductivo del movimiento como respuesta al caso cualquiera («modificando las posiciones de los puntos, la suma… es…», tabla 13a). Pero por otra parte, responden que la demostración recoge «lo hecho» con el software y que, a su vez, resulta ser la comprobación de «lo que ya habíamos pensado» (Tabla 13b). Según el profesor:

> Aquí hubiera hecho falta una cámara para grabar su sonrisa [de Elena] al comprobar que lo que estaban viendo era una Demostración (con mayúscula) de la idea que tenían en un principio, es decir, que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. Esto no lo han puesto por escrito, pero creo que les ha gustado ver que ellas mismas se daban cuenta de que los tres ángulos estaban uno junto a los otros formando una «línea recta» o «un ángulo de 180º». Ante mi insistencia en que escribieran lo que estaban pensando, se quedaron con esta despedida: *Conclusión: hemos demostrado lo que habíamos inducido*. En realidad no sé si querían decir «hemos demostrado lo que ya sabíamos antes de empezar la sesión». De todas formas, también estuvieron un rato mirando los dos archivos Cabri y veían que estaban dando vueltas sobre la misma idea.

Pensamos que «la misma idea» es el conocimiento previo de la propiedad de la suma. Puesto que intuimos, en la actividad 2, que esto constituye un obstáculo para Elena e Irene a la hora de entender lo que es una inducción, y que sabemos que les cuesta diferenciar una conjetura de una conclusión, nos parece lógico si responden que su proceso es una demostración. En primer lugar, porque es el proceso más coherente con un hecho asumido. ¿No es habitual, en clase de matemáticas, enunciar una propiedad y luego demostrarla? Clairaut intenta demarcarse rotundamente de esta tendencia, como lo dice en el principio de su prefacio. Es decir, que, en términos actuales, pretende favorecer el descubrimiento de una conjetura significante para el lector de modo que, posteriormente, éste pueda tratar su prueba con una convicción razonable sobre su pertinencia. En segundo lugar, porque pensamos que el gusto de haber podido relacionar la propiedad de la suma con los tres ángulos que «formaban una línea recta» manifiesta una anticipación instrumental, posiblemente antes de considerar el párrafo LXIV. Su «demostración» traduciría un proceso de verificación por experimentación que pertenece a un grupo de estrategias de prueba conocido en didáctica de las matemáticas, del cual podemos decir que:

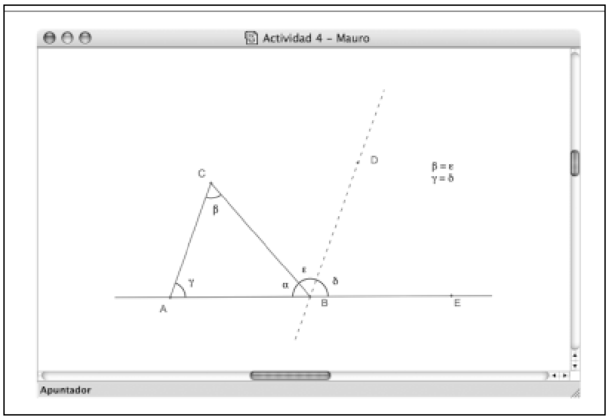
> La certidumbre se fundamenta sobre la experimentación del efecto de la conjetura (…) seguida de una generalización del método o de un proceso inferencial que evoca la inducción ingenua. (…) el experimento consiste en una verificación cuyo objetivo es probar, contrariamente a la observación de regularidades, constataciones perceptivas o anticipación teórica con el fin de formular una conjetura (Richard, 2004b, p.95).

Puede que la estrategia empleada por Elena e Irene falle matemáticamente, pero es coherente con un desconocimiento del papel de la conjetura y con un entendimiento usual de la racionalidad típica de las ciencias experimentales.

Tabla 13
Solución de los alumnos a la actividad 4.

	PAULA	ELENA E IRENE	MAURO
a)	Moviendo los puntos A, B y C para crear muchos triángulos. En todos ellos se cumple que la suma de los ángulos es 180º.	Modificando las posiciones de los puntos, la suma de sus tres ángulos es 180º.	Se puede observar en la construcción que he realizado con el Cabri.
b)	Es una inducción porque se «razona de lo particular a lo general».	Es la demostración de lo hecho en el Cabri, porque comprobamos lo que ya habíamos pensado. CONCLUSIÓN. Hemos demostrado lo que habíamos inducido.	Una inducción, ya que es un ejemplo, un caso particular, el utilizado para demostrarlo.

Figura 14
Aspecto del fichero de Mauro.



La construcción de Mauro es más depurada, representando lo que retiene de la situación (Figura 14). Deja ver solamente los ángulos que intervienen en su interpretación de «todo lo que acabamos de decir» en la pregunta a, escondiendo una parte de la demostración de Clairaut. En lugar de utilizar el color, escribe dos igualdades, pero contrariamente a Paula o Elena e Irene, el ángulo opuesto a ε no está marcado. Parece evidente que quiere subrayar la correspondencia entre los ángulos del triángulo y su carácter suplementario. Si responde, en primer lugar, con una referencia a su construcción («se puede observar…», tabla 13a), no solamente es porque su razonamiento está completamente instrumentado por el medio, sino que deja al lector-usuario la generalización a un caso cualquiera por razonamiento gráfico o instancia de movimiento con el Cabri II Plus. Dicho de otro modo, su dibujo no vehicula la demostración propuesta por el autor como en la figura 4 de los *Éléments* porque instrumenta el proceso inductivo con «un ejemplo» (Tabla 13b), es decir, el estado de su construcción al abrir el fichero. Por tanto, iluminado por el texto de Clairaut, entendemos que Mauro llega a representar conscientemente, con el software, el contenido matemático clave y el proceso que conduce a aceptar el carácter genérico de una figura cualquiera.

7. DISCUSIÓN

Para ultimar, sacamos conclusiones a dos niveles. En este apartado, pretendemos establecer tipos de comportamiento de los alumnos a partir de cinco indicadores, que se desprenden del análisis de datos y del marco teórico, en los siguientes aspectos: autonomía, interacción, razonamiento-discurso, figura-instrumentación y control-instrumentalización. Cada uno sintetiza el detalle del *apartado 6* y se presenta esquemáticamente, por alumno, a partir de aspectos que mantuvieron durante el conjunto de las actividades. En el *apartado 8*, agrupamos las conclusiones generales, formuladas en términos de consecuencias didácticas, e integramos brevemente una proyección de los tipos de comportamiento en la educación matemática.

Comportamiento del alumno en el sistema sujeto-medio

Autonomía

La cuestión de autonomía que contemplamos aquí no se plantea según algún nivel de independencia en relación con el medio, sino en la capacidad de respetar la lógica interna en las situaciones propuestas (Richard et al., 2008). Puesto que el desarrollo de la autonomía influye directamente en la resolución de las actividades y, consecuentemente, recae en el proceso de conceptualización, nos interesa para situar la tendencia que tiene el alumno en operar dentro del contexto fino de aprendizaje. Así:

– Paula es ciertamente la alumna que más responde a las preguntas del cuestionario y que fundamenta sus soluciones en la lógica del texto de Clairaut.

– Elena e Irene responden a las preguntas sin mucha convicción porque asumen de antemano la conclusión como hipótesis, invirtiendo de hecho la lógica esperada.

– Mauro responde muy bien a las preguntas propuestas y no tiene reparos en reorganizar la lógica del texto en función de lo que más le conviene para dar consistencia a sus argumentos.

Interacción

A partir de nuestro marco teórico, mostramos que la interacción sujeto-medio se produce tanto en relación con el software como con el texto de Clairaut. Aun así, la interacción dominante varía de un alumno a otro, porque el medio gestiona una parte de los conocimientos y que de allí se puede considerar la parte de los controles que pertenece efectivamente al alumno. Recogemos aquí el modo de interacción sobresaliente que los alumnos mantuvieron durante nuestro estudio:

– La interacción de Paula se realiza en el juego instrumentación-instrumentalización.

– Elena e Irene se dejan instrumentar por el medio material, aunque tenemos evidencias de un proceso de instrumentalización en la actividad 4.

– Mauro interactúa mucho con el medio: cuestiona al docente y utiliza esencialmente el software por su potencial de representación semiótica instrumentada.

Razonamiento-discurso

Aunque las preguntas del cuestionario no piden resolver problemas de matemáticas de manera tradicional, el alumno tiene que justificar o motivar sus respuestas. El razonamiento se materializa más allá del aspecto verbal del discurso, es decir, conjuntamente con los signos figurales o las herramientas del software. Este indicador sintetiza el uso de los sistemas de representación en su función referencial (dar sentido) y discursiva (producir inferencias):

– Paula emplea mucho, en coordinación con el discurso, el razonamiento gráfico para sacar conclusiones y anticipar propiedades que permanecen invariantes con el movimiento.

– Elena e Irene razonan poco respecto al texto de Clairaut, pero saben describir verbalmente procesos matemáticos a partir de su contenido.

– Mauro razona bastante con el discurso y lo suele utilizar como punto de partida en la representación de conocimientos matemáticos, incluso en la representación de procesos metamatemáticos.

Figura-instrumentación

El empleo del Cabri II Plus produce figuras geométricas que, además de representar el resultado de una construcción, instrumenta al alumno para que pueda reconocer propiedades que permanecen invariantes con el desplazamiento, como la localización de puntos o el efecto de alguna medición. Porque se opera a la vez con figuras dinámicas y estáticas, el alumno trabaja con objetos mediados por el medio, pasado de uno al otro por mecanismos de conversión o traducción:

– Para Paula, la construcción de una figura dinámica y su lectura instrumentada es más un ejercicio de conversión que de traducción.

– Elena e Irene suelen reproducir los conocimientos geométricos con el software y traducirlo a la lengua natural.

– Además de la lengua natural respecto al razonamiento, Mauro utiliza mucho el software como sistema de representación dinámica.

Control-instrumentalización

El extracto de Clairaut y nuestro cuestionario insisten precisamente en los aspectos metamatemáticos del razonamiento. Si, como operador, el razonamiento permite expresar un resultado, como control desvela al mismo tiempo una estructura de validación y decisión, y un modo de anticipar consecuencias razonadas en un contexto instrumentado. Resumimos aquí lo que rige la manera con la que el alumno utiliza la herramienta y la expresión del razonamiento:

– Del mismo modo que con el control parece anticipar la validación, Paula sabe anticipar los resultados de sus experimentaciones.

– Elena e Irene dejan una parte importante del control al medio material, sobre todo en cuanto a la gestión del razonamiento.

– Aunque Mauro acepta que el medio intelectual pueda gestionar una parte de la racionalidad, parece usar simultáneamente el software con el discurso para estructurar sus razonamientos.

Tipología del comportamiento

Si bien nuestro artículo propone un análisis a partir de cuatro alumnos, habíamos seleccionado estos casos en función de su potencial representativo. Es decir, que los tipos establecidos pueden representar el conjunto de los alumnos que participaron en nuestro experimento, aunque hace falta, desde un punto de vista metodológico, mostrar la mecánica de cómo cada alumno comparte caracteres comunes para legitimarlo. Dicho de otro modo, el dominio de validez de la tipología no se plantea tanto en función del tamaño de la muestra, como en la necesidad de ajustar las frecuencias asociadas a cada tipo y, probablemente, refinar o ventilar la tipología cuando un tipo aparece mucho más frecuentemente que los demás. En este marco, reconocemos los tipos de comportamiento siguientes, según las características de cada alumno en el sistema sujeto-medio (sección anterior):

– Paula es de tipo **promotor**. Constatamos que anticipa las expectativas, toma la iniciativa en la interacción y utiliza tanto las funcionalidades del software como la posibilidades de la representación figural para crear soluciones originales. Cuando opone objeciones, no es para poner trabas en la impugnación de un argumento, sino para manifestar una crítica autónoma y proponer un razonamiento alternativo.

– Elena e Irene son de tipo **acompañante**, o mejor dicho, Elena es de tipo acompañante si la identificamos como el sujeto distinguido (ver actividad 1 en el *apartado 6*). Por sus problemas de autonomía, los sujetos son racionalmente dependientes del medio. Evidentemente, aquí no hay ningún juicio de valor, aún menos en un contexto de aprendizaje disidente. Reconocemos más bien una dependencia situacional e instrumentada real para el desarrollo de soluciones. Pueden tomar iniciativa en la interacción cuando el medio les sabe estimular.

– Mauro es de tipo **organizador**. Consideramos que sabe poner en marcha o colocar, de forma funcional, los elementos del medio que necesita para desarrollar soluciones estructuradas por su razonamiento. Puede rentabilizar el alcance de sus argumentos en función de esta necesidad, pero también para aumentar el sentido pedagógico de la racionalidad propuesta por el medio.

8. CONCLUSIONES

El estudio con textos históricos, aunque esté dirigido a través de un cuestionario o instrumentado por una herramienta informática, necesita la intervención del docente. Desde la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1998), falta subrayar que el papel principal del docente consiste en actuar en el sistema sujeto-medio para dar sentido a la interacción del alumno y a los conocimientos implicados. Sin embargo, su papel es fundadamente paradójico. Porque, por una parte, quiere que el alumno produzca respuestas adecuadas, manifestando así el éxito, al menos aparente, de su acción. Mientras que, por otra parte, el alumno no dispone aún de los medios cognitivos o discursivos necesarios: proporcionárselos es precisamente tarea del docente. Si el comportamiento *acompañante* fuera dominante, el docente tendría que ayudar visiblemente al alumno para que trabaje en la misma situación que la propuesta y que respete su lógica interna, condiciones indispensables para el avance de sus competencias discursivas. Aunque la ayuda puede realizarse con el diseño de actividades ad hoc o gracias a una actitud general que favorece el desarrollo de la autonomía, la utilización de los *Éléments* permite justamente al alumno ejercitarse, de forma consciente, con dos procesos inferenciales que se encuentran en clase de matemáticas (inducción y demostración). Pensamos que la iluminación histórica representa un elemento clave para resolver esta paradoja, además de potenciar el estudio, con un gran maestro, a partir de estrategias en resolución de problemas que no se suelen encontrar en un libro de texto convencional.

En nuestro análisis, constatamos que los alumnos son conscientes, en un grado u otro, de que los enfoques inductivos o deductivos proceden cada uno con su propia racionalidad. Paula y Mauro supieron asociar el enfoque inductivo al uso de la herramienta «desplazamiento» y el enfoque deductivo a una lectura sobre la figura. Elena e Irene, aunque creemos que se hubieran beneficiado de la acción del docente, llegaron a darse cuenta de que ellas mismas podían tener ideas convergentes con el maestro. Entonces, el potencial formador y motivador es patente, sobre todo cuando opera con argumentos matemáticos fundados, en lugar de satisfacer a un conjunto de artificios pedagógicos que esconden desafortunadamente la problemática y los conocimientos involucrados. Por otro lado, al utilizar el texto original, cuyo lector modelo es precisamente un principiante, no solamente se justifica contextualmente los conceptos y procesos involucrados, sino que les personaliza y les sitúa en su tiempo. Gracias a la iluminación histórica, el alumno puede trabajar a partir de problemas que comparten tanto un valor formativo como epistemológico, sin que los fenómenos de descontextualización, despersonalización y desincretización sean obstáculos insalvables en el diseño de actividades.

Aunque hoy en día nadie discute sobre la pertinencia de emplear o no dispositivos tecnológicos en clase de matemáticas, el aprendizaje instrumentado continúa planteando cuestiones acerca de las estructuras de control. Porque cuando la responsabilidad de gestión es demasiado fuerte en el medio, el alumno podría perder de vista, a la larga, la coherencia matemática que se estructura con el razonamiento. Por supuesto, en situación de modelización, la informática es muy útil para simular un experimento complejo, explorar con una selección de condiciones iniciales y sacar conclusiones bajo restricciones elegidas, dejando más tiempo para el ejercicio de interpretación. De hecho, pensamos que el comportamiento *organizador* es propenso a modelar situaciones y a beneficiarse de la interpretación instrumentada. Pero el juicio que planteamos aquí se refiere más bien al uso excesivo que menosprecia la importancia en desarrollar explícitamente competencias de razonamiento estructurado y significante. Nos parece que el comportamiento *promotor* es precisamente fruto de una exigencia equilibrada en el control de los conocimientos, su validación y su instrumentalización. En este aspecto, la iluminación histórica, junto con el uso del software de geometría dinámica, concurren en el progreso de estos aprendizajes.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer al profesor Ángel Gutiérrez (Universidad de Valencia) por sus comentarios muy pertinentes y a los profesores Rafa Losada (IES de Pravia) y José Antonio Mora (IES San Blas de Alicante) por la calidad de su participación en la fase experimental.

NOTAS

1. Además de la edición de 1741, los *Éléments de géométrie* se publicaron en 1753, 1765, 1775, 1830, 1852, 1853, 1857 y 1861. La versión española, recientemente traducida, está pendiente de publicación. Se puede encontrar una versión electrónica en http://antalya.uab.es/edumat/elementos/Portada.htm.
2. Aunque el sujeto y el medio forman parte del mismo sistema cognitivo, separamos los controles por sus características dominantes para facilitar el análisis.
3. De hecho, en el artículo de Coutat y otros (2010), se muestra que las figuras dinámicas constituyen un registro de representación semiótica propio, distinto del registro tradicional de las figuras geométricas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. y NELSEN, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington: the Mathematical Association of America.

BALACHEFF, N. y MARGOLINAS, C. (2005). Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In Mercier, A. y Margolinas, C. (eds.). *Balises pour la didactique des mathématiques*, pp. 75-106. Grenoble: La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CLAIRAUT, A.C. (1775). *Élémens de Géométrie*. París: Cellot & Jombert.

COMIN, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collègue. *Recherches en didactique des mathématiques,* 22(2.3), pp. 135-182.

COUTAT, S., LABORDE, C. y RICHARD, P.R. (2010). L'apprentissage instrumenté des propriétés en géométrie: un élément de continuité dans le développement d'une compétence de preuve au collège. *Educational Studies in Mathematics*. Pendiente de publicación.

DRIJVERS, P., KIERAN, C. y MARIOTTI, M.A. (2008). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives, en Hoyles, C. y Lagrange, J.B. (eds.). *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*. Nueva York/Berlin: Springer.

ECO, U. (1979). *Lector in Fabula, la Cooperazione Interpretativa nei Testi Narrativi*. Milano: Bompiani.

EUCLIDE D'ALEXANDRIE (1990). *Les éléments*. *Livres I à IV*. Traducción del texto de Heiberg publicado entre 1883 y 1888. París: Presses Universitaires de France.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématique*. Grenoble: La pensée sauvage.

MEAVILLA, V. (2007). *Aprendiendo de los grandes maestros. Selección de problemas lineales y cuadráticos rescatados de los* Elementos de Álgebra *de Leonhard Euler (1707-1783)*. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

RABARDEL, P. (2001). Instrument mediated activity in situations, en Blandford, A., Vanderdinckt, J. y Gray, P. (eds.). *People and computers, interactions without frontiers*, pp. 17-30. Berlín: Springer.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand Colin.

RICHARD, P.R. (2004a). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics,* 57, pp. 229-263.

RICHARD, P.R. (2004b). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berna: Peter Lang

RICHARD, P.R., COBO, P. y FORTUNY, J.M. (2008). Mejora de competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico. *Actas del IV Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación del Profesorado de Matemáticas*. Pendiente de publicación.

RICHARD, P.R. y SIERPINSKA, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. In Lemoyne, G. et Sackur, C. (rédactrices invitées). *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Revue des sciences de l'éducation, Numéro thématique,* 30(2), pp. 379-409.

[Artículo recibido en julio de 2008 y aceptado en enero de 2009]

Classical Texts and Dynamic Geometry: A Mutual Contribution Geometry Learning

Richard, Philippe R.[1], Meavilla Seguí, Vicente[2] y Fortuny Aymemí, Josep Maria[3]
[1] Département de didactique, Université de Montréal, Canadá
[2] Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España
[3] Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona
philippe.r.richard@umontreal.ca
vmeavill@hotmail.com
JosepMaria.Fortuny@uab.cat

Summary

The new edition of classical mathematical texts, or its recent digitization for the general public, represents an approach to the universe that has been traditionally reserved to historians and other experts on epistemology. Many texts from the 18th century were already presented like works aimed at the explanation of certain mathematical concepts, and the interpretation of the coherence of the mathematical structure and the formal aspects of convincing proofs. The *Éléments de géométrie* by Alexis Claude Clairaut, that were first published in 1741, is an example of this type of pedagogical texts. Based on an experiment with high school students, our article examines the development of the students' mathematical competences through the analysis of one of Clairaut's texts, along with the use of dynamic geometry software.

The conceptual framework of our research starts with the theory of didactical situations in Brousseau mathematics (1998) in order to locate the development of mathematical competences of the students in their interactions with the milieu. It continues with the functional-structural approach to the study of mathematics school texts of Richard and Sierpinska (2004), which makes it possible to show how the Clairaut extract – that justifies experimentally the property of the sum of the angles of a triangle, before proving it in the manner of Euclid – uses the discourse and the geometrical figures to carry out the various functions of the language. It finishes with the cognitive approach of the contemporary instruments of Rabardel (1995, 2001), so as to bring closer the notions of instrument and milieu in the acquisition of mathematical knowledge and the joint development of mathematical competences, particulary with the instrument mediated activity in situations.

The methodological framework that we propose adds, to the conceptual framework, the model of knowledge of Balacheff and Margolinas (2005), with the aim of giving an account of the conceptions conveyed by 16-17 year-old students. Those students must use dynamic geometry software, whereas they never received explicit teaching on mathematical proof or deductive reasoning in Euclidean geometry. On the basis of these two frameworks, we present three analyses. The first dissects the Clairaut's extract from the point of view of communication, directed by the idea of the model reader of Eco (1975). A second analyzes a priori the situations suggested to the students. Those situations are posed using a leading questionnaire that directs the reading and requires, by considering the figures of Clairaut, to act with the interface of the Cabri II Plus. The third summarizes a posteriori the situations, i.e. starting from the production of the students in their interactions with the milieu (process of writing or action with the interface). In particular, the notions of graphic reasoning and figural inference of Richard (2004a, b) are used for the analysis of the situations and the interpretation of the student behaviour.

Following these analyes, we establish three types of student behaviour, according to five indicators that emerge from the methodological and conceptual frameworks: autonomy, interaction, reasoning-discourse, figure-instrumentation and control-instrumentalization. In the systems «subject-milieu», we conclude that a student is a promoter, follower or organizer, exploring the didactic consequences of each type when the student benefits from the illumination of a Great Master of the 18th century and the use of current computer technologies.