Quand les abeilles font de la géométrie

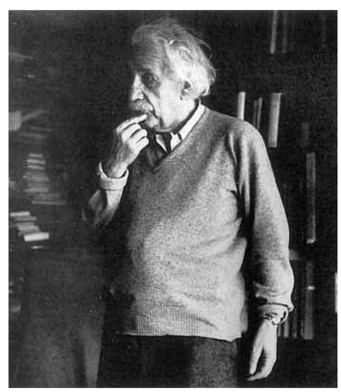
Le nid d'abeilles est une pièce maîtresse de génie absolument parfaite dans l'économie de travail et de cire. Charles Darwin

L'histoire des abeilles accompagne celle de l'homme depuis toujours. Déjà, on sait qu'au cours de la préhistoire, l'homme élevait des abeilles pour en savourer le miel. Ce goût pour la douceur du précieux liquide a facilement traversé les siècles au point que tout près de nous, à Château-Richer en banlieue de Québec, le Musée de l'abeille honore l'histoire fascinante des relations qui nous unissent à cet être minuscule. Albert Einstein nous a même déjà mis en garde. Si les abeilles venaient un jour à disparaître, nous n'aurions plus que quelques années à vivre. Mais l'intérêt pour les abeilles n'est pas seulement qu'une question d'histoire, de consommation ou d'écologie. En y regardant de plus près, la structure de la ruche constitue un univers des plus étonnant. Voyons ce que perçoit l'œil du géomètre.

Préhistoire. Reproduction d'une peinture rupestre vieille d'environ 7 000 ou 8 000 ans trouvée à la Grotte de l'araignée près de Valence en Espagne (nom d'origine : «Cueva de la Araña»). Cette peinture témoigne d'une sorte d'apiculture primitive : on y voit une personne suspendue à des lianes, portant un panier pour recueillir sa récolte, la main plongée dans un tronc d'arbre à la recherche de rayons de miel. *Source : wikipedia.org et arterupestre.net*

Traverser les siècles. Pot de miel de Doyon & Doyon, entreprise fondée en 1927 par les frères Paul et Georges Doyon. Il s'agit d'une des plus anciennes sociétés apicoles toujours en activité au pays. Signe de la mondialisation, le «miel pur Doyon» s'élabore actuellement à partir de miel canadien et argentin. Au Québec, on comptait 204 apiculteurs actifs et 27 146 colonies d'abeilles en 2004. La production de miel s'élevait alors à 931,6 t et les ventes ont rapporté 5 601,7 k$. *Source : mieldoyon.com et stat.gouv.qc.ca*

Mise en garde. Photographie d'Albert Einstein (Ulm 1879 - Princeton 1955) qui doute. Si on voulait schématiser la suite dans ses idées, on aurait : «pas d'abeilles» → «pas de pollinisation» → «disparition de certaines espèces végétales» → «disparition de certaines espèces animales»… Ainsi, parce que les abeilles sont responsables de la pollinisation, donc de la reproduction de plus de vingt mille espèces de plantes, l'homme et les animaux auraient rapidement peine à se nourrir. L'année mondiale de la physique 2005 a souligné le profond respect qu'Einstein vouait à la nature : «Ce que je vois dans la Nature est une structure magnifique que nous ne pouvons appréhender que de manière très imparfaite et qui doit nous remplir d'un sentiment d'humilité. C'est un sentiment véritablement religieux qui n'a rien à voir avec le mysticisme». *Sources : cite-sciences.fr et astrosurf.org*



Extrait de Richard, P.R. (2006). Quand les abeilles font de la géométrie. In Pallascio, R. et Doddridge, É. (Éds.) *Montrez cette mathématique que je ne saurais voir!*, 57-63. Montréal: Les Éditions nouvelles.

L'aménagement dans la ruche

Figure 1

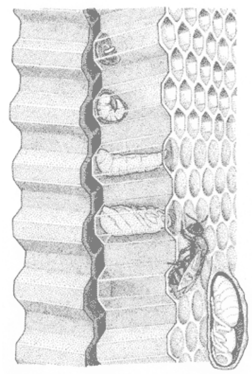


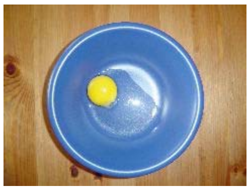
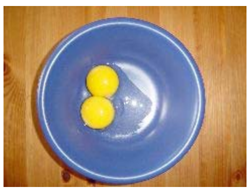
Figure 2

Lorsqu'on pense à une ruche, c'est sans doute l'élégance et la symétrie de la structure hexagonale qui nous vient à l'esprit (figure 1). Dans l'espace, cette structure s'appelle le *gâteau de cire*. Elle contient deux plans parallèles d'alvéoles (figure 2), c'est-à-dire les cavités où l'abeille dépose son miel ou ses œufs. Vue du dessus, l'alvéole est souvent rond, ce qui semble adapté à la forme d'un œuf. Pourtant, la cire qui unie les alvéoles prend nettement la forme d'un réseau d'hexagones réguliers, ou nid d'abeilles, et cela, avec une précision remarquable. Non seulement les parois de chaque alvéole mesurent moins de 0,1 mm et sont façonnées avec une précision de 0,002 mm, mais l'angle entre chaque paroi mesure systématiquement 120°. À croire que les abeilles possèdent une sorte de sens géométrique, comme l'a suggéré le mathématicien Pappus d'Alexandrie il y a près de 2000 ans. Que se cache-t-il donc sous la forme des alvéoles? Pourquoi les abeilles n'ont elles pas adopté une autre forme ou, simplement, une forme aux contours arrondis? S'agit-il, comme le dit Charles Darwin en exergue, d'une économie de cire et de quantité de travail nécessaire à la construction et à l'aménagement de la ruche?

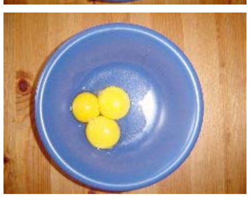
Remplir le plan et l'espace

On sait que la meilleure façon, pour un corps donné, d'occuper un minimum d'espace, c'est de former une boule. C'est d'ailleurs la position qu'adopte naturellement le fœtus chez la plupart des animaux, évitant du coup que la mère qui le porte soit trop grosse, donc moins habile. En fait, la boule permet d'englober un maximum d'espace avec un minimum de surface. Si les animaux ont tendance à se recroqueviller dès qu'il fait froid, c'est pour diminuer le plus possible la surface exposé, comme le chat qui se met «en boule» pour conserver sa chaleur tout en protégeant son abdomen. Si on voulait maintenant entreposer un ensemble de boules, disons des œufs, de façon à éviter le plus possible toute perte de chaleur, alors on penserait à les rapprocher pour que l'ensemble forme une sorte de grande boule, ce qui pose la question du remplissage de l'espace. Cependant, pour les abeilles, empiler les œufs engendreraient un problème d'accès parce que pour atteindre un œuf «en dessous», il faudrait déplacer les œufs «du dessus». À moins, justement, de placer les œufs sur deux plans parallèles. Il faut donc considérer conjointement la question du remplissage du plan.

Remplissage de l'espace. Le panier d'oranges de gauche s'assimile à une grande boule. On remarque qu'il y a beaucoup d'espace entre les oranges et qu'ainsi disposées, elles pourraient tomber facilement. C'est sans doute pourquoi l'épicier qui veut mettre en évidence ses oranges (de même diamètre) les place soigneusement en pyramide, ce qui donne une structure stable qui se suffit à elle-même (pas besoin de contenant). Chaque étage de la pyramide forme un carré et les faces latérales présentent un arrangement hexagonal. Lorsque les oranges ont un diamètre différent, il est préférable de les placer dans un contenant. Savoir comment disposer des oranges dans un contenant quelconque pour minimiser l'espace entre les oranges, donc de maximiser la densité des oranges, est un problème célèbre connu sous le nom de la *conjecture de Kepler*, énoncé en 1661 par l'astronome allemand Johannes Kepler (Weil 1571 – Rastibonne 1630). Il a fallu attendre en 1998 pour que le mathématicien états-unien Thomas Hales (voir plus loin dans le texte) en fournisse une preuve à l'aide d'un ordinateur, dont on dit qu'elle est valable à 99%.

Remplissage du plan. Dans le plan, on sait depuis les travaux de l'astronome, mathématicien et physicien allemand Carl Friedrich Gauss (Brunswick 1777 – Göttingen 1855) que la disposition hexagonale de disques est plus dense que tout autre disposition. C'est d'ailleurs de cette façon que les jaunes d'œufs (de poule) s'arrangent naturellement au fond d'un récipient lorsque le pâtissier doit les séparer du blanc d'œuf (voir ci-après). Par contre, si le bord du récipient est une contrainte, le problème devient plus difficile du point de vue mathématique. En 1940, le mathématicien hongrois László Fejes Tóth (Szeged 1915 - Budapest 2005) a démontré que c'est encore la disposition hexagonale qui est la plus dense. Si on voulait minimiser davantage l'espace entre les jaunes d'œufs, pourquoi alors ne pas les tasser avec une cuillère? Au lieu de se placer «en carrés», comme sur un étage d'une pyramide d'oranges, les jaunes d'œufs changent de forme grâce à la flexibilité des parois; ils s'approchent d'hexagones. Idéal pour l'élaboration d'un gâteau au miel…





Bulles «hexagonales»?

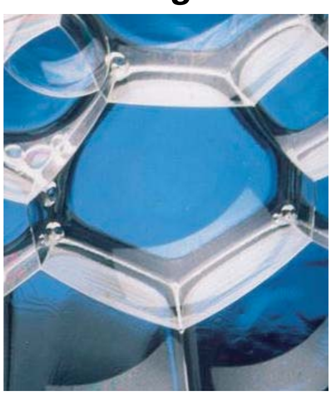


Figure 3

Quoi de plus simple que de penser à la mousse pour remplir l'espace. Lorsqu'on se sert une bière fraîche ou une coupe de champagne, la mousse envahit rapidement le haut du verre en épousant la forme du contenant. Les bulles, qui naissent en sphères isolées, se compriment les unes sur les autres et cherchent à s'équilibrer selon la souplesse de leur paroi et la pression du gaz carbonique qu'elles referment (figure 3). Bien qu'elles finissent par disparaître, les bulles adoptent des formes plus ou moins stables, allant de polyèdres aux bords droits à des solides creux aux surfaces courbes.

Quand on emprisonne la mousse entre deux plaques de verre (figure 4), on s'aperçoit que les bulles pavent le plan avec ce qui semble constituer des polygones. De fait, les parois sont faites de liquide et on sait que l'énergie totale de la mousse est proportionnelle à la somme des longueurs de toutes les parois. La somme des longueurs des parois tend ainsi à diminuer : chaque paroi est sous tension et peut présenter une courbure. Puisque les bulles sont faites de gaz carbonique et qu'elles ne communiquent pas, leurs pressions peuvent différer. L'équilibre est atteint quand la tension des parois, qui tendrait à rétracter la mousse, et la pression des bulles, qui pousse vers l'extérieur, se compensent exactement.

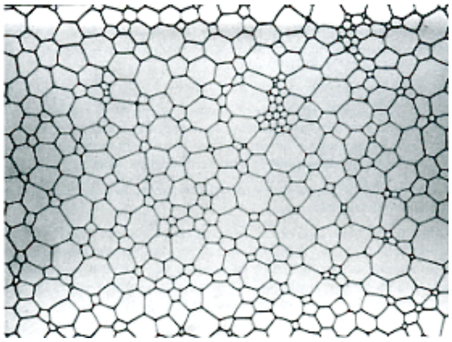


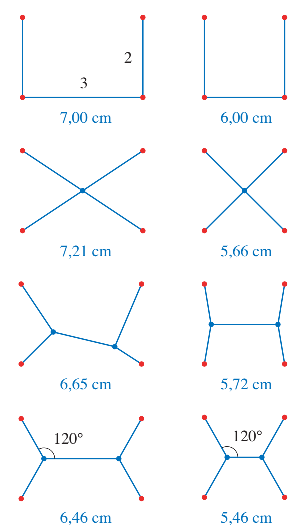
Figure 4

À la figure 4, on remarque que les parois se rencontrent trois par trois et qu'elles forment des angles de 120° – les sommets à quatre parois sont toujours instables et ils ne durent qu'une fraction de seconde dans la mousse.
Il existe une relation, attribuée au mathématicien suisse Leonhard Euler (Bâle 1707 - Saint-Petersbourg 1783), entre le nombre de bulles, de parois et de sommets :

$$n_{\text{bulles}} - n_{\text{parois}} + n_{\text{sommets}} = 1$$

Dans une grande mousse, c'est-à-dire lorsque n_{bulles} devient très grand, on peut déduire que le nombre moyen de voisine d'une bulle tend vers six. Ce résultat est très général et il est valable non seulement pour les mousses, mais aussi pour tout réseau dont les parois se rencontrent trois par trois. Même que si une bulle a un nombre de sommets autre que six, on peut montrer qu'elle a nécessairement les parois courbées.

Sommets à quatre parois. Si on prend quatre points disposés aux quatre coins d'un rectangle 3×2 (colonne de gauche) ou d'un carré de côté 2 (colonne de droite) et que l'on essaie de les relier par des films de savon de longueur minimale, on a plusieurs possibilités. Soit en utilisant trois films qui suivent les côtés du quadrilatère (1$^{\text{re}}$ ligne), quatre films qui suivent les diagonales (2$^{\text{e}}$ ligne) ou cinq films qui se rencontrent en deux points à l'intérieur du rectangle (3$^{\text{e}}$ et 4$^{\text{e}}$ lignes). Il est possible de montrer mathématiquement que dans un rectangle $a \times b$, si $\frac{a}{b} > \sqrt{3}$ il n'y a qu'une seule solution à cinq films, alors que si $\sqrt{3} > \frac{a}{b} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ il y a deux solutions possibles. Lorsque les films forment des angles de 120° entre eux, la longueur totale des films est toujours minimale. En particulier, on peut inscrire un pavage hexagonal régulier de côté 1 dans un pavage rectangulaire $2 \times \sqrt{3}$.



Au fond des alvéoles

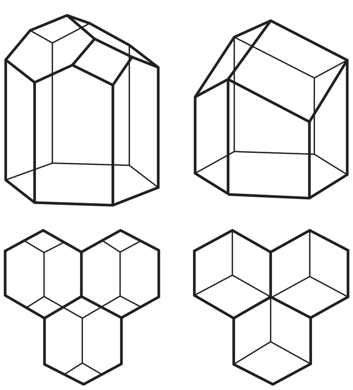


Figure 5

Contrairement à la mousse, le gâteau de cire, lui, est solide. Avec son réseau d'hexagones réguliers, le nid d'abeilles enveloppe densément les œufs dans chaque plan tout en utilisant une quantité de cire minimale. Cependant, que se passe-t-il au fond des alvéoles? Le gâteau de cire se structure-t-il carrément en prismes droits, comme le suggère la figure 2? Si c'était le cas, la densité des œufs ne serait pas maximale dans l'espace. Les alvéoles se terminent en fait par trois losanges qui font des angles de 120° entre eux (figure 5, colonne de droite) et qui minimise, encore une fois, l'aire de l'alvéole, donc la quantité de cire. Les trois faces en forme de losanges, ou faces rhombiques, constituent

Quantité de cire minimale. Le mathématicien Thomas C. Hales, actuellement professeur à l'Université de Pittsburgh, a démontré en 2001 ce qu'on appelle la *conjecture du nid d'abeilles*. Cette conjecture, qui semblait intuitivement évidente à Pappus d'Alexandrie, est restée sans démonstration formelle pendant près de deux millénaires. En fait, Hales a démontré que de tous les découpages du plan en régions de même aire, c'est le pavage en hexagones réguliers qui a le plus petit périmètre. Comme les alvéoles logent des œufs de même forme et de même volume, les abeilles optimisent donc de façon absolue la quantité de cire nécessaire à la construction des nids.

Prismes droits. Dans le nord de l'Irlande, on trouve des prismes droits qui pavent l'espace de façon spectaculaire. La Chaussée des géants offre au promeneur un ensemble de roches basaltiques qui forme un réseau de prismes droits à base hexagonale –ou presque, comme les bulles de la figure 4. Du point de vue géométrique, s'il n'y a que trois polygones réguliers qui pavent le plan (triangle équilatéral, carré, hexagone régulier), il n'y a qu'un seul polyèdre régulier qui pave l'espace. C'est le cube. À une échelle suffisamment petite, la matière solide d'origine naturelle apparaît presque toujours sous une forme cristalline. L'organisation des cristaux est souvent celle qui réduit au minimum l'énergie d'interaction entre les atomes d'un corps solide. Dans le cas des métaux, les structures métalliques se caractérisent par une tendance à la compacité maximale. Et dans le cas des métaux purs, les structures cristallines les plus compactes sont obtenues avec ce qu'on appelle le réseau cubique à faces centrées et le réseau hexagonal compact.

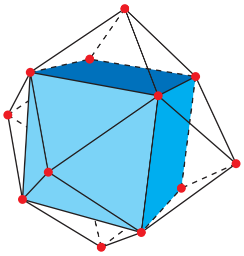


Figure 6

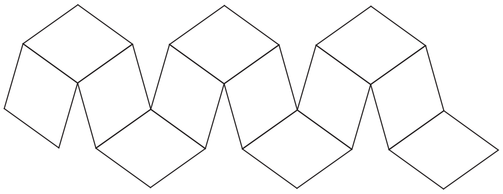


Figure 7

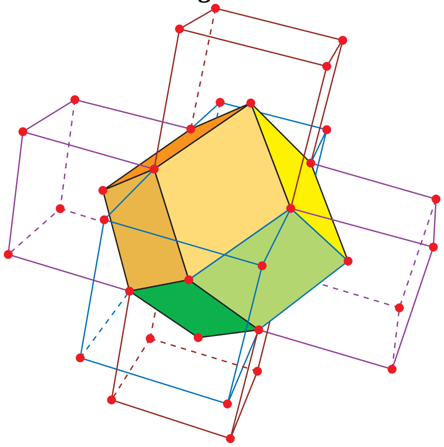


Figure 8

trois faces contiguës d'un dodécaèdre rhombique (figure 6). On obtient ce polyèdre à douze faces en construisant des pyramides droites sur chaque face du cube de façon à ce que les faces latérales des pyramides (triangles isocèles) forment des losanges deux à deux (ou un angle de 45° avec la base). La figure 6 montre un cube inscrit dans un dodécaèdrerhombique et la figure 7 montre un patron de ce dernier.

Maintenant, si on regarde de haut un sommet quelconque du cube, les arêtes du dodécaèdre rhombique forment un hexagone, ce qui rend compatible le fond des alvéoles avec le nid d'abeille. Et ce n'est pas tout. Les sommets du dodécaèdre rhombique coïncident avec le centre de cubes placés en croix dans l'espace (figure 8). On en déduit que le dodécaèdre rhombique est un polyèdre qui permet de paver l'espace. Il n'y a donc pas de perte d'espace dans le gâteau de cire. Les abeilles peuvent donc y entreposer leur miel et leurs œufs en toute tranquillité. ⬣